

# PROZESSE

Andreas Handl

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Was ist ein Prozess?</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Quellen der Variation</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Eingriffe in Prozesse und ihre Konsequenzen</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Qualitätsregelkarten</b>	<b>23</b>
4.1	Was ist eine Qualitätsregelkarte? . . . . .	23
4.2	Die $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen . . . . .	26
4.3	Die OC-Funktion und ARL . . . . .	35
4.4	Die $\bar{X}/R$ -Karte . . . . .	40
4.4.1	Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n > 1$ . . . . .	40
4.4.2	Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n = 1$ . . . . .	46
4.4.3	Die Bestimmung der Konstanten . . . . .	49
4.5	Qualitätsregelkarten für Zählvariablen . . . . .	52
4.6	Einige Fragen zu Qualitätsregelkarten . . . . .	54
4.7	Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis . . . . .	57
4.7.1	Die EWMA-Karte . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Prozessfähigkeitsanalyse</b>	<b>65</b>
5.1	$\mu$ und $T$ stimmen überein . . . . .	66
5.2	$\mu$ und $T$ stimmen nicht überein . . . . .	72
<b>A</b>		<b>76</b>
A.1	Beweise . . . . .	76
A.1.1	Der Beweis von Gleichung (4.61) auf Seite 60 . . . . .	78
A.1.2	Der Beweis von Gleichung (4.62) auf Seite 61 . . . . .	79
A.1.3	Die geometrische Folge . . . . .	80
A.2	Tabellen . . . . .	81

# Kapitel 1

## Was ist ein Prozess?

Wir werden uns im Folgenden mit statistischer Prozesskontrolle beschäftigen. In DIN EN ISO 8402 wird ein Prozess definiert als

ein Satz von in Wechselbeziehungen stehenden Mitteln und Tätigkeiten, die Eingaben in Ergebnisse umgestalten.

Nach ISO 8402 ist ein Prozess also durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

- Ein Prozess erhält Eingaben.
- Es gibt eine Menge von Mitteln und Tätigkeiten.
- Diese Mittel und Tätigkeiten stehen in Wechselbeziehungen.
- Ein Prozess liefert Ergebnisse.

### Beispiel 1

Das Backen einer Berliner Schrippe ist ein Prozess. Ein Rezept ist unter

<http://www.chefkoch.de/rezepte/126201054028080,66/Berliner-Schrippen.html>

zu finden:

#### Zutaten für 30 Portionen

900 g Mehl (Weizenmehl Type 550)  
100 g Mehl (Weizenmehl Type 1050)  
5 g Zucker  
100 g Fett (Margarine)  
50 g Hefe

20 g Salz

560 g Wasser, kalt

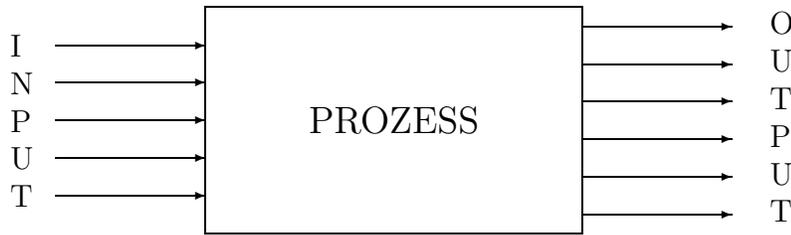
### Zubereitung

Mehl sieben und mischen, Hefe in Wasser auflösen, restliche Zutaten hinzufügen und zu einem mittelfesten Teig kneten. Teig 2x20 Min. ruhen lassen. Ca.30 Stücke abstechen, längliche Brötchen formen. Bei 3/4 Gare (nicht ganz aufgegangen!) mit einem scharfen Messer längs einschneiden in den auf 240 Grad vorgeheizten Ofen schieben. Backzeit 18-20 Min. Beim Einschieben eine Tasse Wasser auf die Platte im Backofen schütten.

Die Eingaben dieses Prozesses sind die Zutaten, das Ergebnis ist die Berliner Schrippe. Als Mittel wird explizit der Backofen genannt. Zu den Tätigkeiten gehört das Sieben, Mischen und Kneten.

Wir bezeichnen im Folgenden die Eingaben des Prozesses als Input und das Ergebnis als Output.

Die folgende Abbildung veranschaulicht einen Prozess.



Auf den ersten Blick deckt die obige Definition nicht alles ab, was wir unter einem Prozess verstehen. So bezeichnen wir auch den Transport eines Gutes oder einer Person von einem Ort A zu einem Ort B als Prozess. Die folgende Definition der DCQ berücksichtigt diesen Tatbestand.

Ein Prozess ist die Gesamtheit von in Wechselbeziehungen stehenden Abläufen, Vorgängen und Tätigkeiten, durch welche Werkstoffe, Energien oder Informationen transportiert oder umgeformt werden.

(DGQ 11-04, S. 14, Nr. 1.1.1)

### **Beispiel 2**

Ein Arbeitnehmer fährt jeden Morgen um die gleiche Zeit mit dem Auto von seinem Wohnort zur Arbeit.

Als Statistiker sind wir an Charakteristika des Outputs des Prozesses interessiert. Es werden Merkmale erhoben, die qualitativ oder quantitativ sind.

### **Beispiel 1 (fortgesetzt)**

Den Bäcker und die Kunden interessiert das Gewicht und der Geschmack des Brötchens. Das Gewicht ist ein quantitatives Merkmal und der Geschmack ein qualitatives Merkmal mit ordinalem Messniveau.

### **Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Den Arbeitnehmer interessiert die Fahrzeit. Die Fahrzeit ist ein quantitatives Merkmal.

Statistiker beschäftigen sich mit Prozessen, die mehrmals beobachtet werden können. Wird zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots$  die Ausprägung des Merkmals bestimmt, so erhält man eine Folge von Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$

### **Beispiel 1 (fortgesetzt)**

Nach jedem Backvorgang bestimmt der Bäcker das Gewicht eines der Brötchen. Er erhält nach 20 Backvorgängen folgende Werte:

68 73 72 74 68 69 70 71 68 68 68 69 67 69 69 68 66 71 72 68

Es gilt zum Beispiel  $x_1 = 68$  und  $x_8 = 71$ .

### **Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit und erhält folgende Werte

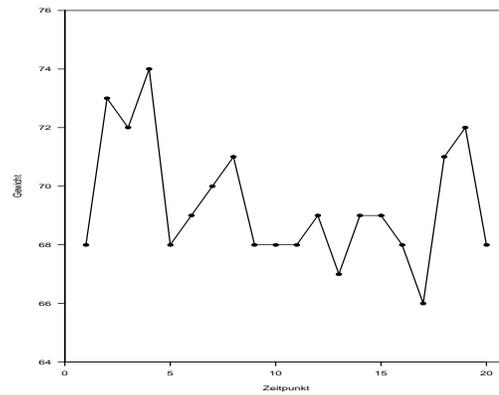
29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Die Folge der Beobachtungen stellt man in einem **Run-Chart** grafisch dar. Bei diesem werden die Merkmalswerte  $x_t$  gegen die Zeit  $t$  gezeichnet. Außerdem werden aufeinander folgende Punkte durch Geraden verbunden.

### Beispiel 1 (fortgesetzt)

Abbildung 1.1 zeigt den Run-Chart des Gewichts der Brötchen.

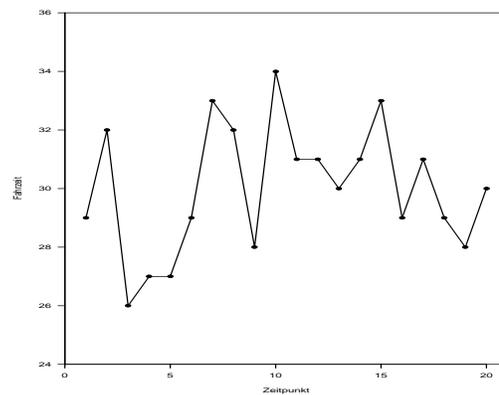
Abbildung 1.1: Gewicht von Brötchen



### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Abbildung 1.2 zeigt den Run-Chart der Fahrzeit des Arbeitnehmers.

Abbildung 1.2: Fahrzeit des Arbeitnehmers



In beiden Beispielen ist es so, dass der Output des Prozesses hinsichtlich der interessierenden Merkmale nicht konstant ist. Die Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$  sind also Realisationen der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ . Erfüllt die Folge  $X_1, X_2, \dots$  bestimmte Annahmen, so zeigt sie stabiles Verhalten und kann prognostiziert werden.

# Kapitel 2

## Quellen der Variation

Kann das Verhalten eines Prozesses in einem gewissen Rahmen prognostiziert werden, so spricht man davon, dass der Prozess unter statistischer Kontrolle ist. Dabei stellen sich zwei Fragen:

1. Wann ist ein Prozess unter statistischer Kontrolle?
2. Woran erkennt man, dass ein Prozess nicht mehr unter statistischer Kontrolle ist?

Mit Frage 1 werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Der Output eines Prozesses ist nicht konstant, da es eine Reihe von Größen gibt, die variieren und einen Einfluss auf den Prozess haben. Diese Größen kann man im Gegensatz zum Input nicht kontrollieren.

### **Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Die Fahrzeit des Arbeitnehmers hängt von vielen Faktoren ab. So wird an einem Tag eine Ampel auf der Strecke rot sein. Dies führt zu einer Verlängerung der Fahrzeit gegenüber einem Tag, an dem die Ampel grün ist. An manchen Tagen muss er an einer Vorfahrtstraße warten, an anderen hingegen nicht. Auf der Strecke gibt es auf einmal eine Baustelle.

Man kann zwei Typen von Einflussgrößen unterscheiden. Es gibt

- **zufällige Ursachen der Variabilität** (chance causes of variation, common cause)
- **systematische Ursachen der Variabilität** (assignable causes of variation, special cause)

Man nennt die systematischen Ursachen auch nachweisbare Ursachen.

Bissell (1994) zählt auf Seite 102 Charakteristika zufälliger Ursachen und systematischer Ursachen der Variabilität auf. Für zufällige Ursachen der Variabilität gilt:

- Es gibt viele kleine Einflüsse.
- Diese sind oft nicht individuell identifizierbar.
- Es gibt ein stabiles Gesamtniveau an Streuung.
- Gesamteffekte sind vorhersehbar.
- Ein beträchtlicher Aufwand ist nötig, um die Variation zu reduzieren.
- Sie werden als Ausgangspunkt zur Identifizierung nachweisbarer Ursachen genommen.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Ampel und die Vorfahrtstraße sind zufällige Quellen der Variation.

Die zufälligen Quellen der Variation haben zur Folge, dass das Ergebnis des Prozesses nicht konstant ist. Sie bewirken aber, dass die Gesamtniveau an Streuung stabil ist und dass Gesamteffekte vorhersehbar sind. Dies bedeutet, dass das Niveau und die Variabilität des Outputs konstant ist.

Wir bezeichnen die zufälligen Quellen der Variation im Zeitpunkt  $t$  mit  $\epsilon_t$ . Da die zufälligen Quellen der Variation keinen systematischen Einfluss haben, gilt für  $t = 1, 2, \dots$

$$E(\epsilon_t) = 0 \tag{2.1}$$

Da wir annehmen, dass das Gesamtniveau an Streuung stabil ist, gilt  $t = 1, 2, \dots$

$$Var(\epsilon_t) = \sigma^2 \tag{2.2}$$

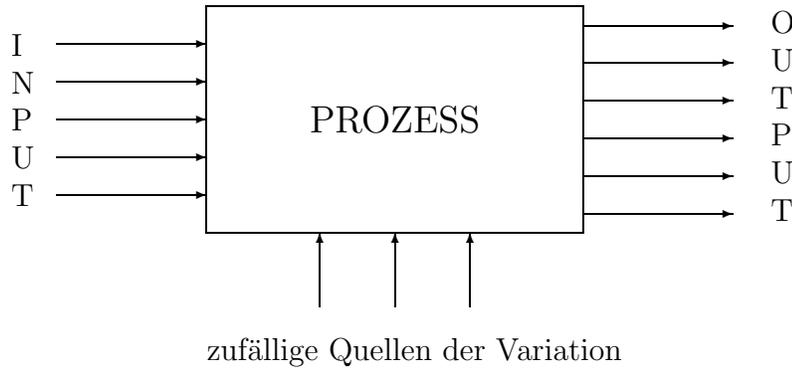
Außerdem nehmen wir noch an, dass die zufälligen Einflüsse unterschiedlicher Zeitpunkte unkorreliert sind. Für  $s \neq t$  gilt also:

$$Cov(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0 \tag{2.3}$$

Mit  $\epsilon_t$  können wir  $X_t$  folgendermaßen darstellen:

$$X_t = \mu + \epsilon_t \tag{2.4}$$

Die folgende Abbildung zeigt, dass bei einem Prozess, der unter statistischer Kontrolle ist, nur zufällige Ursachen der Variation vorhanden sind.



Die Zufallsvariable  $X_t$  setzt sich also additiv zusammen aus einem systematischen Term  $\mu$ , der gleich dem Niveau des Outputs ist, und einem stochastischen Term  $\epsilon_t$ , der bewirkt, dass der Output streut. Diese Streuung ist aber konstant, sodass man weiß, in welchem Bereich die Realisationen des Prozesses liegen.

Unter den Annahmen (2.1), (2.2) und (2.3) gilt dann für  $X_t$ :

$$E(X_t) = \mu \tag{2.5}$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \tag{2.6}$$

und

$$Cov(X_s, X_t) = 0 \tag{2.7}$$

Gleichung (2.5) ist wegen

$$E(X_t) \stackrel{(2.4)}{=} E(\mu + \epsilon_t) = \mu + E(\epsilon_t) = \mu$$

und Gleichung (2.6) wegen

$$Var(X_t) \stackrel{(2.4)}{=} Var(\mu + \epsilon_t) \stackrel{(A.6)}{=} Var(\epsilon_t) = \sigma^2$$

erfüllt. Die Herleitung von Gleichung (A.6) ist auf Seite 76 zu finden.

Mit Gleichung (A.3) auf Seite 76 sieht man die Gültigkeit von Gleichung (2.7) folgendermaßen:

$$Cov(X_s, X_t) \stackrel{(A.3)}{=} Cov(\mu + \epsilon_s, \mu + \epsilon_t) = Cov(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0$$

Die Abbildungen 1.1 und 1.2 auf Seite 5 zeigen stabile Prozesse.

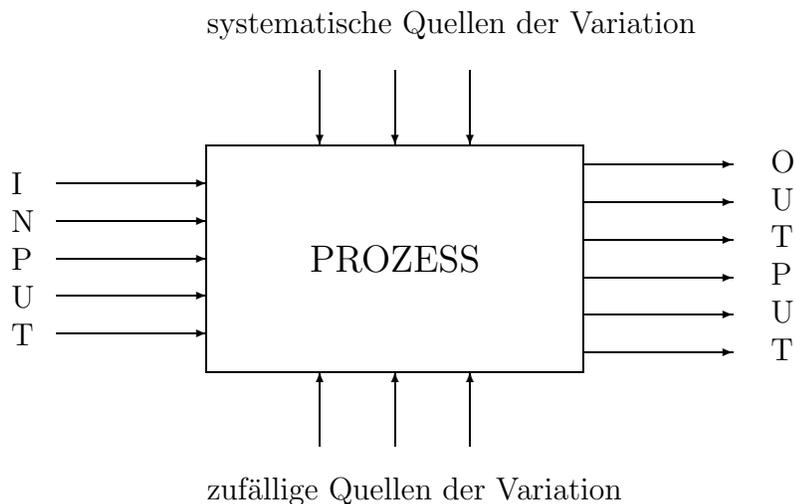
Ein Prozess ist nicht unter statistischer Kontrolle, wenn systematische Quellen der Variation auf ihn wirken. Bissell (1994) zählt auf Seite 105 Charakteristika nachweisbarer Ursachen der Variabilität auf.

- Es gibt einige wenige Einflüsse.
- Diese sind irregulär im Auftreten.
- Sie sind oft unvorhersehbar in der Wirkung.
- Sie werden durch kleine Eingriffe behoben.
- Sie fallen durch Qualitätsregelkarten auf.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Baustelle ist eine systematische Quelle der Variation. Sie verändert das Niveau des Prozesses.

Die folgende Abbildung verdeutlicht, dass bei einem Prozess, der nicht unter statistischer Kontrolle ist, neben zufälligen Quellen der Variabilität auch systematische Quellen der Variation aktiv sind.



Systematische Quellen der Variation bewirken, dass sich das Niveau oder die Variabilität des Prozesses ändern.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Die Baustelle wird zur Folge haben, dass sich die mittlere Fahrzeit verlängert. Sie kann auch bewirken, dass die Streuung der Fahrzeit größer wird.

Abbildung 2.1 zeigt einen Prozess, dessen Lage ab dem Zeitpunkt 11 größer wurde.

Abbildung 2.1: Prozess mit Lageverschiebung

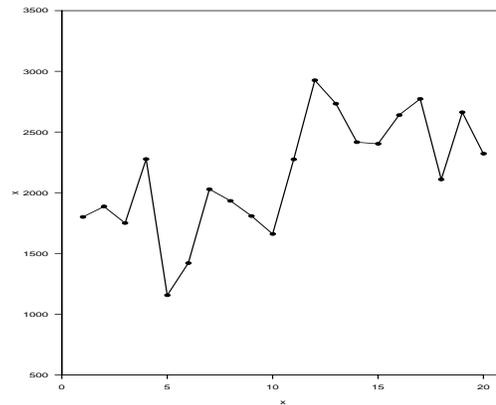
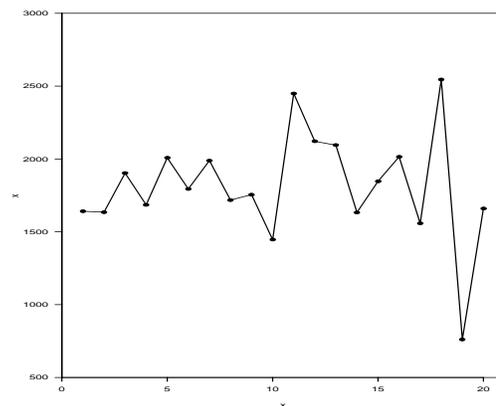


Abbildung 2.2 zeigt einen Prozess, dessen Streuung ab dem Zeitpunkt 11 größer wurde.

Abbildung 2.2: Prozess mit Vergrößerung der Streuung



Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, kann eine systematische Quelle der Variation auch zur Folge haben, dass ein Prozess Autokorrelation aufweist.

Schauen wir uns ein Beispiel für einen Prozess mit Autokorrelation an.

### Beispiel 3

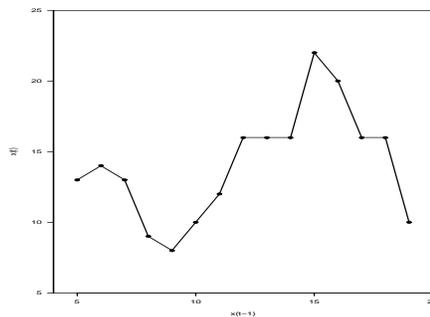
Wir betrachten die Höchsttemperatur in Münster vom 5.4.2005 bis zum 19.4.2005.

Tabelle 2.1: Höchsttemperatur in Münster vom 5.4.2005 bis zum 19.4.2005

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Temperatur	13	14	13	9	8	10	12	16	16	16	22	20	16	16	10

Abbildung 2.3 zeigt die Zeitreihe.

Abbildung 2.3: Höchsttemperatur in Münster vom 1.5.2003 bis zum 10.5.2004



Die Abbildung deutet auf Abhängigkeit zwischen benachbarten Werten. Auf warme Tage folgen eher warme Tage und auf kalte Tage eher kalte Tage.

Um zu überprüfen, ob in einer Zeitreihe  $x_1, x_2, \dots$  benachbarte Beobachtungen  $x_{t-1}$  und  $x_t$  abhängig sind, schauen wir uns die Paare  $(x_{t-1}, x_t)$  an.

### Beispiel 3 (fortgesetzt)

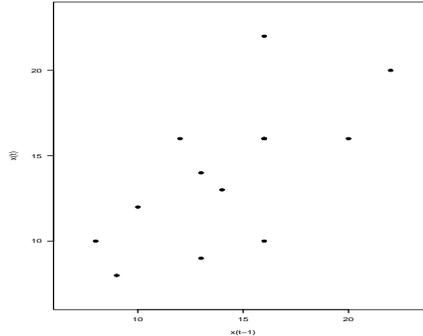
Bei einer Zeitreihe der Länge 15 erhält man 14 Paare. So bilden die Beobachtungen  $x_1 = 13$  und  $x_2 = 14$  das erste Paar. Hier sind alle Paare.

$$\begin{array}{cccccccc} (13, 14) & (14, 13) & (13, 9) & (9, 8) & (8, 10) & (10, 12) & (12, 16) \\ (16, 16) & (16, 16) & (16, 22) & (22, 20) & (20, 16) & (16, 16) & (16, 10) \end{array}$$

Bevor man eine Maßzahl für den Zusammenhang zwischen  $x_{t-1}$  und  $x_t$  bestimmt, sollte man sich das Streudiagramm von  $x_t$  gegen  $x_{t-1}$  anschauen.

### Beispiel 3 (fortgesetzt)

In Abbildung 3 ist das Streudiagramm von  $x_t$  gegen  $x_{t-1}$  zu finden.



Wir sehen, dass die beiden Merkmale miteinander positiv korreliert sind.

Liegen die Punktpaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  vor, so ist die empirische Kovarianz

$$s_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.8)$$

eine Maßzahl für den linearen Zusammenhang zwischen den  $x_i$  und  $y_i$ . Ersetzen wir  $x_i$  durch  $x_{t-1}$  und  $y_i$  durch  $x_t$ , so erhalten wir die Autokovarianz  $c_1$  zum Lag 1.

### Beispiel 3 (fortgesetzt)

Es gilt  $c_1 = 10.94$ .

Die empirische Kovarianz ist nicht normiert. Dividieren wir sie durch das Produkt der Standardabweichungen der beiden Merkmale, so erhalten wir den Korrelationskoeffizienten, der Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt. Entsprechend erhalten wir den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1.

### Beispiel 3 (fortgesetzt)

Es gilt  $r_1 = 0.68$ .

Analog zum Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1 kann man die Korrelation zwischen Beobachtungen betrachten, die nicht benachbart sind. Betrachtet man die Korrelation zwischen  $x_{t-2}$  und  $x_t$ , so erhält man den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 2.

### Beispiel 3 (fortgesetzt)

Es gilt  $r_2 = 0.38$ .

# Kapitel 3

## Eingriffe in Prozesse und ihre Konsequenzen

Wir gehen aus von einem Prozess  $X_1, X_2, \dots$  aus, der unter statistischer Kontrolle ist. Für  $t = 1, 2, \dots$  gilt also

$$E(X_t) = \mu \quad (3.1)$$

$$Var(X_t) = \sigma^2 \quad (3.2)$$

$$Cov(X_s, X_t) = 0 \quad \text{für } s \neq t, \quad (3.3)$$

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Wir schauen uns noch einmal die Fahrzeiten des Arbeitnehmers an:

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

In der Regel hat man eine Vorstellung von dem Wert, den das interessierende Merkmal annehmen sollte. Wir bezeichnen diesen als Zielwert  $z_0$  und gehen davon aus, dass der Zielwert  $z_0$  mit dem Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses zusammenfällt. Es gilt also

$$E(X_t) = \mu = z_0 \quad (3.4)$$

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer will um 8 Uhr 30 am Arbeitsplatz sein. Er weiß aus Erfahrung, dass er im Mittel 30 Minuten von seiner Wohnung zum Arbeitsplatz benötigt. Er fährt deshalb um 8 Uhr von zu Hause los. Der Arbeitnehmer hat das Ziel, um 8 Uhr 30 in der Firma anzukommen. Wir verzichten im Folgenden auf die Angabe der Stunde und sprechen nur vom Zielwert 30. Kommt er also um 8 Uhr 34 an, so schreiben wir 34. Dies ist dann der beobachtete Wert des Prozesses. Da er jeden Tag um 8 Uhr losfährt, sind die obigen Zahlen die beobachteten Werte des Prozesses.

Wir wollen untersuchen, welche Konsequenzen es hat, wenn man in einen Prozess eingreift. Dabei betrachten wir zwei Arten von Eingriffen, die von Deming (1986) und Krehbiel (1994) näher untersucht wurden. Man spricht vom **Eingriff mit unendlichem Gedächtnis** und vom **Eingriff ohne Gedächtnis**. In der Regel ändern sich die Werte des Prozesses durch den Eingriff. Wir bezeichnen die Werte des Prozesses, die sich nach dem Eingriff ergeben, mit  $E_t$ .

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer orientiert sich bei seinem Eingriff an der Ankunftszeit. Schauen wir uns dies für die ersten beiden Tage an. Er fährt am ersten Tag um 8 Uhr los und kommt um 8 Uhr 29 an. Er stellt fest, dass er eine Minute zu früh angekommen ist. Daraus zieht er die Konsequenz, dass er am nächsten Tag 1 Minute später losfährt. Er fährt am zweiten Tag also um 8 Uhr 1 los. Da er 32 Minuten unterwegs ist, kommt er um 8 Uhr 33 an. Also gilt  $E_2 = 33$ . Hätte er nicht in den Prozess eingegriffen, so hätte er den Wert  $X_2 = 32$  beobachtet, denn er wäre ja um 8 Uhr losgefahren.

Nun kommen wir zum dritten Tag. Er orientiert sich weiterhin an der Ankunftszeit und stellt fest, dass er 3 Minuten zu spät angekommen ist. Also muss er 3 Minuten früher losfahren. Nun stellt sich aber die Frage, auf welche Zeit sich diese 3 Minuten beziehen. Es kommen 8 Uhr und 8 Uhr 1 in Frage. Wählt er 8 Uhr, so vergisst er, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist, und wählt seine normale Abfahrtszeit 8 Uhr. Man spricht vom **Eingriff ohne Gedächtnis**. Diesen schauen wir uns weiter unten genauer an.

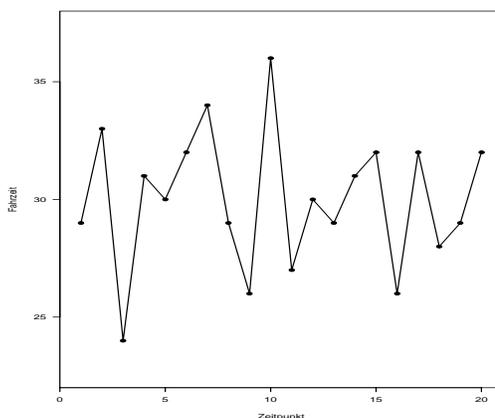
Wählt er hingegen 8 Uhr 1, so erinnert er sich, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist. Man spricht vom **Eingriff mit unendlichem Gedächtnis**. Schauen wir uns an, wie sich bei diesem die Werte entwickeln. Am dritten Tag muss er also 3 Minuten früher losfahren und erinnert sich, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist. Also fährt er um 7 Uhr 58 los und kommt um 8 Uhr 24 an, da seine Fahrzeit 26 Minuten beträgt. Nach dem Eingriff gilt  $E_3 = 24$ , während ohne Eingriff  $X_3 = 26$  gilt.

Wenden wir diese Vorgehensweise auf alle Beobachtungen an, so erhalten wir nachstehende Folge:

29 33 24 31 30 32 34 29 26 36 27 30 29 31 32 26 32 28 29 32

Abbildung 3.1 zeigt den resultierenden Prozess.

Abbildung 3.1: Prozess nach Eingriff mit unendlichem Gedächtnis



Für  $E_t$  ergibt sich folgende Abhängigkeit von  $X_{t-1}$ ,  $X_t$  und  $z_0$ .  
 Offensichtlich ist  $E_1 = X_1$ . Für  $t > 1$  gilt

$$E_t = X_t + z_0 - X_{t-1} \quad (3.5)$$

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Mit  $X_1 = 29$  folgt  $E_1 = 29$ .

Mit  $X_1 = 29$ ,  $X_2 = 32$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_2 = 32 + 30 - 29 = 33$$

Mit  $X_2 = 32$ ,  $X_3 = 26$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_3 = 26 + 30 - 32 = 24$$

Es stellt sich die Frage, ob der Eingriff die Struktur des Prozesses verändert.  
 Schauen wir uns dies zunächst für das Beispiel an.

**Beispiel 2 (fortgesetzt)**

Für den ursprünglichen Prozess gilt

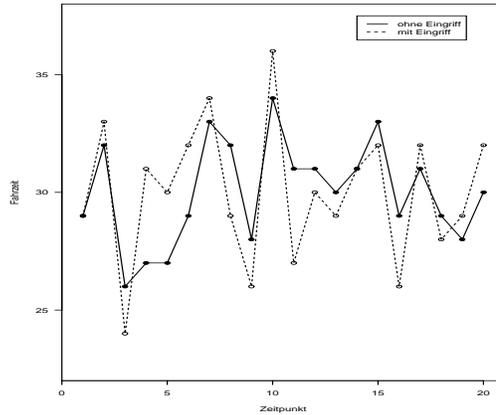
$$\bar{x} = 30 \quad s^2 = 4.84 \quad r_1 = 0.109$$

Nach dem Eingriff erhalten wir folgende Werte

$$\bar{e} = 30 \quad s^2 = 8.63 \quad r_1 = -0.49$$

Das Niveau des Prozesses hat sich nicht geändert, während die Varianz sich fast verdoppelt hat. Der ursprüngliche Prozess wies nahezu keine Autokorrelation zum Lag 1 auf, während der Autokorrelationskoeffizient nach dem Eingriff den Wert  $-0.49$  aufweist. Abbildung 3.2 mit beiden Prozessen bestätigt dies.

Abbildung 3.2: Prozess ohne Eingriff und nach Eingriff mit unendlichem Gedächtnis



Schauen wir uns jetzt den Erwartungswert, die Varianz und den Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 1 an.

Es gilt

$$E(E_t) = \mu. \quad (3.6)$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$E(E_t) = E(X_t + z_0 - X_{t-1}) = E(X_t) + z_0 - E(X_{t-1}) \stackrel{(3.1)}{=} \mu + z_0 - \mu = z_0.$$

Da wir unterstellen, dass der Prozess unter Kontrolle ist, gilt  $z_0 = \mu$ . Also ändert sich das Niveau des Prozesses durch den Eingriff nicht.

Weiterhin gilt

$$Var(E_t) = 2\sigma^2. \quad (3.7)$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(E_t) &= \text{Var}(X_t + z_0 - X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(A.6)}}{=} \text{Var}(X_t - X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(A.7)}}{=} \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_{t-1}) - 2 \text{Cov}(X_{t-1}, X_t) \\
&\stackrel{\text{(3.3)}}{=} \text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(3.2)}}{=} \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2
\end{aligned}$$

Es gilt noch

$$\text{Cov}(E_{t-1}, E_t) = -\sigma^2. \quad (3.8)$$

Um diese Beziehung zeigen zu können, benötigen wir einige Eigenschaften der Kovarianz  $\text{Cov}(X, Y)$ , die im Anhang zu finden sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(E_{t-1}, E_t) &= \text{Cov}(X_{t-1} + z_0 - X_{t-2}, X_t + z_0 - X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(A.3)}}{=} \text{Cov}(X_{t-1} - X_{t-2}, X_t - X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X_{t-1}, X_t - X_{t-1}) + \text{Cov}(-X_{t-2}, X_t - X_{t-1}) \\
&\stackrel{\text{(A.2)}}{=} \text{Cov}(X_t - X_{t-1}, X_{t-1}) + \text{Cov}(X_t - X_{t-1}, -X_{t-2}) \\
&\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) + \text{Cov}(-X_{t-1}, X_{t-1}) \\
&\quad + \text{Cov}(X_t, -X_{t-2}) + \text{Cov}(-X_{t-1}, -X_{t-2}) \\
&\stackrel{\text{(A.4)}}{=} \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) - \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) \\
&\quad + -\text{Cov}(X_t, X_{t-2}) + \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) \\
&\stackrel{\text{(3.3)}}{=} -\text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-1}) \stackrel{\text{(A.1)}}{=} -\text{Var}(X_{t-1}) \stackrel{\text{(3.2)}}{=} -\sigma^2
\end{aligned}$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_1$  zum Lag 1 ist der Korrelationskoeffizient zwischen  $E_{t-1}$  und  $E_t$ . Für diesen gilt

$$\rho_1 = \frac{\text{Cov}(E_{t-1}, E_t)}{\sqrt{\text{Var}(E_{t-1}) \text{Var}(E_t)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 2\sigma^2}} = -0.5$$

Der Eingriff mit unendlichem Gedächtnis hat keinen Einfluss auf das Niveau des Prozesses. Die Varianz des Prozesses verdoppelt sich aber. Außerdem führt der Eingriff dazu, dass der Prozess eine negative Korrelation zum Lag 1 besitzt.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

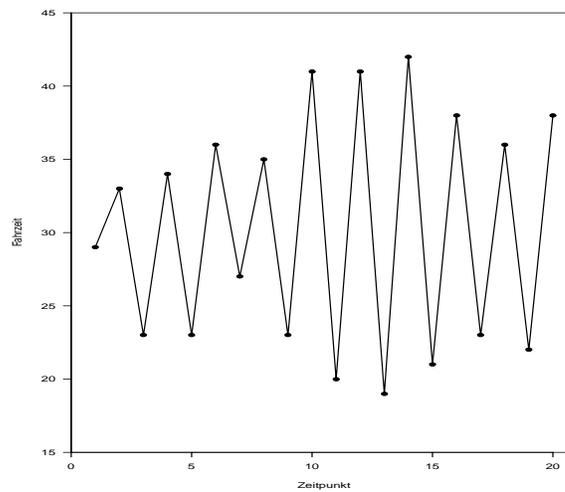
Schauen wir uns nun den Eingriff ohne Gedächtnis an.

Die ersten beiden Tage sind mit dem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis identisch. Der Arbeitnehmer wählt den Zeitpunkt der Ankunft als Kriterium für den Eingriff. Am ersten Tag kommt er um 8 Uhr 29 an und fährt am nächsten Tag um 8 Uhr 1 los. Er kommt um 8 Uhr 33 an. Er muss also am dritten Tag 3 Minuten früher losfahren. Jetzt vergisst er aber, dass er am zweiten Tag um 8 Uhr 1 losgefahren ist und orientiert sich an 8 Uhr. Er fährt am dritten Tag also um 7 Uhr 57 los und kommt um 8 Uhr 23 an. Wenden wir dieses Prinzip auf die gesamte Reihe an, so erhalten wir folgende Reihe nach dem Eingriff ohne Gedächtnis:

29 33 23 34 23 36 27 35 23 41 20 41 19 42 21 38 23 36 22 38

Abbildung 3.3 zeigt den resultierenden Prozess.

Abbildung 3.3: Prozess nach Eingriff ohne Gedächtnis



Bei einem Eingriff ohne Gedächtnis gilt

$$E_1 = X_1$$

Für  $t > 1$  gilt:

$$E_t = X_t + z_0 - E_{t-1} \quad (3.9)$$

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Mit  $X_1 = 29$  folgt  $E_1 = 29$ .

Mit  $X_2 = 29$ ,  $E_1 = 32$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_2 = 32 + 30 - 29 = 33$$

Mit  $X_3 = 26$ ,  $E_2 = 33$  und  $z_0 = 30$  folgt

$$E_3 = 26 + 30 - 33 = 23$$

Es stellt sich die Frage, ob der Eingriff die Struktur des Prozesses verändert. Schauen wir uns dies zunächst für das Beispiel an.

### Beispiel 2 (fortgesetzt)

Für den ursprünglichen Prozess gilt

$$\bar{x} = 30 \quad s^2 = 4.84 \quad r_1 = 0.109$$

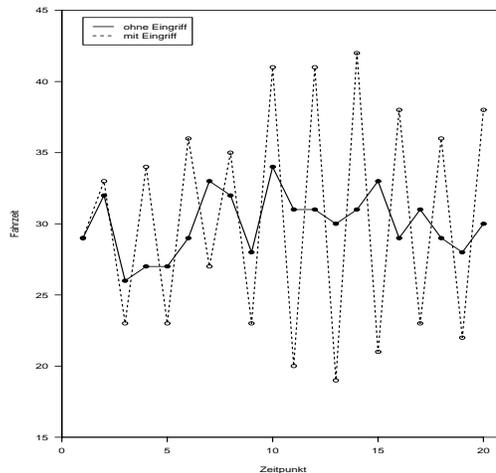
Nach dem Eingriff ohne Gedächtnis erhalten wir folgende Werte

$$\bar{e} = 30.2 \quad s^2 = 63.5 \quad r_1 = -0.936$$

Das Niveau des Prozesses hat sich nicht geändert, während die Varianz sich drastisch vergrößert hat. Der ursprüngliche Prozess wies nahezu keine Autokorrelation zum Lag 1 auf, während der Autokorrelationskoeffizient nach dem Eingriff den Wert  $-0.936$  aufweist. Benachbarte Beobachtungen sind fast perfekt mit einander negativ korreliert. Der Autokorrelationskoeffizient zum Lag 2 nimmt den Wert  $0.879$  an.

Abbildung 3.4 mit beiden Prozessen bestätigt dies.

Abbildung 3.4: Prozess ohne Eingriff und nach Eingriff ohne Gedächtnis



Um die Konsequenzen untersuchen zu können, muss man den Prozess in Abhängigkeit von  $X_t, X_{t-1}, \dots$  darstellen. Mit  $E_1 = X_1$  gilt:

$$E_2 = X_2 + z_0 - E_1 = X_2 + z_0 - X_1$$

Schauen wir uns noch  $E_3$  an:

$$\begin{aligned} E_3 &= X_3 + z_0 - E_2 \\ &= X_3 + z_0 - (X_2 + z_0 - X_1) \\ &= X_3 + z_0 - X_2 - z_0 + X_1 \\ &= X_3 - X_2 + X_1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt für  $t > 1$ :

$$E_t = 0.5(1 + (-1)^t) z_0 + R_t - X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + (-1)^{t-1} X_1. \quad (3.10)$$

Hieraus folgt

$$E(E_t) = \mu \quad (3.11)$$

und

$$Var(E_t) = t \sigma^2. \quad (3.12)$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_k$  zum Lag  $k$  ist der Korrelationskoeffizient zwischen  $E_{t-k}$  und  $E_t$ . Für diesen gilt

$$\rho_k = (-1)^k \sqrt{1 - \frac{k}{t}}$$

Die Herleitung dieser Beziehungen ist nicht schwer, aber mühselig. Deshalb verzichte ich darauf. Sie sind zu finden in Sparks and Field (2000).

Ein Eingriff ohne Gedächtnis hat auch keinen Einfluss auf das Niveau des Prozesses. Die Varianz wächst aber linear in der Länge des Prozesses. Sind bei einem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis nur benachbarte Beobachtungen miteinander korreliert, so sind bei einem Eingriff ohne Gedächtnis alle Beobachtungen miteinander korreliert. Diese Korrelation hängt auch noch davon ab, wie lange der Prozess schon läuft, und wird mit fortgeschrittener Zeit immer betragsmäßig größer. So gilt im Zeitpunkt  $t = 2$ ,

$$\rho_1 = -\sqrt{1 - 0.5} = -0.707$$

während im Zeitpunkt  $t = 10$  gilt

$$\rho_1 = -\sqrt{1 - 0.1} = -0.949$$

Schauen wir uns noch ein Beispiel an.

### Beispiel 3

In einer Fabrik wird Mehl in Tüten abgepackt. Der Zielwert ist 500. Dieser wird auch vom Prozess eingehalten. Es gilt also  $\mu = 500$ . Das Gewicht von 4 Tüten wird bestimmt. Es ergeben sich folgende Werte:

501 499 502 499

Der Arbeiter kann jede Packung nach dem Abfüllen wiegen. In Abhängigkeit vom Gewicht der Packung kann er in den Prozess dadurch eingreifen, dass er vor dem Abfüllen der nächsten Packung die Stellung eines Schalters verändert. Hierdurch legt er fest, wieviel Gramm mehr oder weniger bei der nächsten Packung abgefüllt werden sollen. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass ein wenig länger oder kürzer abgefüllt wird. Schauen wir uns dies für die erste Packung an. Sie wiegt 501 g, also ein Gramm zu viel. Der Arbeiter würde also vor dem Abfüllen der zweiten Packung den Schalter auf  $-1$  stellen, sodass in die nächste Packung ein Gramm weniger gefüllt wird. Die zweite Packung würde nach diesem Eingriff also  $E_2 = 498$  Gramm wiegen. Nach dem Abfüllen einer Packung, hat der Arbeiter zwei Möglichkeiten

1. Er kann den Schalter in der Stellung lassen.
2. Er kann den Schalter auf 0 stellen.

Beim ersten Fall des Beispiels handelt es sich um einem Eingriff mit unendlichem Gedächtnis, im zweiten Fall um einem Eingriff ohne Gedächtnis.

Beim Eingriff mit unendlichem Gedächtnis bleibt der Schalter nach einem Eingriff in seiner Position und wird von dieser aus beim nächsten Eingriff verändert. Nach dem ersten Eingriff steht der Schalter in der Position  $-1$ . Hierdurch wird bei der zweiten Packung 1 g weniger abgefüllt. Wir beobachten den Wert  $E_2 = 498$ . Da dieser 2 Einheiten unter dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 2 g mehr abgefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 2 erhöht werden muss. Er steht danach auf dem Wert 1. Hierdurch erhöht sich das Gewicht der dritten Packung um den Wert 1 und wir beobachten den Wert  $E_3 = 503$ . Da dieser 3 Einheiten über dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 3 g weniger eingefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 3 vermindert werden muss. Er steht danach auf dem Wert  $-2$ . Hierdurch vermindert sich das Gewicht der vierten Packung um den Wert 2 und wir beobachten den Wert  $E_4 = 497$ .

Beim Eingriff ohne Gedächtnis wird der Schalter nach einem Eingriff auf den Wert 0 gestellt und wird von diesem Wert aus beim nächsten Eingriff verändert. Nach dem ersten Eingriff steht der Schalter in der Position  $-1$ . Hierdurch wird bei der zweiten Packung 1 g weniger abgefüllt. Wir beobachten den Wert  $E_2 = 498$ . Der Schalter wird jetzt auf den Wert 0 gestellt. Da

der Wert  $E_2$  2 Einheiten unter dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 2 g mehr abgefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 2 erhöht werden muss. Er steht danach auf dem Wert 2. Hierdurch erhöht sich das Gewicht der dritten Packung um den Wert 2 und wir beobachten den Wert  $E_3 = 504$ . Der Schalter wird jetzt auf den Wert 0 gestellt. Da der Wert  $E_3$  4 Einheiten über dem Sollwert liegt, müssen bei der nächsten Packung 4 g weniger eingefüllt werden. Das bedeutet, dass der Schalter um 4 vermindert werden muss. Er steht danach auf dem Wert  $-4$ . Hierdurch vermindert sich das Gewicht der vierten Packung um den Wert 4 und wir beobachten den Wert  $E_4 = 495$ .

# Kapitel 4

## Qualitätsregelkarten

### 4.1 Was ist eine Qualitätsregelkarte?

Wir gehen im Folgenden von einem Prozess aus und beobachten die Realisationen  $x_1, x_2, \dots$  der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ . Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass es unterschiedliche Quellen der Variabilität gibt. Sind nur zufällige Quellen der Variabilität aktiv, so zeigt der Prozess ein stabiles Verhalten. Dies bedeutet, dass der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  des interessierenden Merkmals konstant ist. Ist ein Prozess stabil, so ist er unter statistischer Kontrolle und sein Verhalten ist prognostizierbar. Dies ist natürlich wünschenswert. Wirken hingegen systematische Quellen der Variation, so ist der Prozess nicht mehr unter Kontrolle. Dies kann dazu führen, dass sich das Niveau oder Variabilität ändern. Es kann aber auch sein, dass die Beobachtungen autokorreliert sind.

Gerät ein Prozess außer Kontrolle, so sollte dies natürlich schnell bemerkt werden, damit man eingreifen und die Ursache beheben kann. Dies ist mit Hilfe von **Qualitätsregelkarten** möglich. Diese wurden 1924 von Shewhart entwickelt.

Um den Prozess mit Hilfe einer Qualitätsregelkarte zu überwachen, werden zu äquidistanten Zeitpunkten Stichproben vom Umfang  $n$  gezogen und aus diesen der Wert von einer oder mehreren Stichprobenfunktionen bestimmt. Wir betrachten zunächst eine Stichprobenfunktion  $W$ .

#### Beispiel 4

Ein Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Hier ist der Stichprobenumfang  $n$  gleich 1.

### Beispiel 5

Ein Bäcker bestimmt nach jedem Backvorgang das Gewicht von 2 Brötchen. Bei 20 Backvorgängen erhält er folgende Wertepaare:

(72, 70)	(72, 66)	(69, 67)	(70, 72)	(68, 70)
(71, 69)	(69, 66)	(66, 72)	(67, 71)	(74, 66)
(72, 72)	(71, 71)	(69, 67)	(70, 72)	(71, 72)
(69, 69)	(72, 75)	(71, 68)	(74, 68)	(72, 68)

Hier ist  $n = 2$ .

Aus den Daten bestimmt man den Wert der Stichprobenfunktion  $W$  zu den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots$  und erhält eine Folge von Realisationen  $w_1, w_2, \dots$  der Stichprobenfunktion. Will man überprüfen, ob der Prozess hinsichtlich der Lage unter Kontrolle ist, so wird man den Mittelwert der Beobachtungen bestimmen, die zu einem Zeitpunkt erhoben wurden.

Eine Qualitätsregelkarte erhält man, indem man in einem kartesischen Koordinatensystem die Werte  $w_1, w_2, \dots$  der Stichprobenfunktion  $W$  gegen die Zeitpunkte abträgt. Es wird also ein Run-Chart erstellt. An diesem wird man in der Regel nicht erkennen können, ob der Prozess unter Kontrolle ist. Ergänzt man den Run-Chart aber um sogenannte **Kontrollgrenzen**, so kann sehr leicht feststellen, ob der Prozess außer Kontrolle ist.

Ist  $\mu_W = E(W_t)$  der Erwartungswert und  $\sigma_W^2 = Var(W_t)$  die Varianz der Stichprobenfunktion, wenn der Prozess unter Kontrolle ist, so sind die von Shewhart vorgeschlagenen Grenzen:

$$LCL = \mu_W - K \cdot \sigma_W \quad (4.1)$$

und

$$UCL = \mu_W + K \cdot \sigma_W \quad (4.2)$$

$UCL$  steht für **upper control limit** und  $LCL$  steht für **lower control limit**. Im deutschsprachigen Raum verwendet man auch die Bezeichnungen  $UEG$  und  $OEG$ , die für **obere Eingriffsgrenze** und **untere Eingriffsgrenze** stehen.

Shewhart setzte  $K$  auf den Wert 3. Wir übernehmen diese Wahl und gehen also von folgenden Grenzen aus:

$$LCL = \mu_W - 3 \cdot \sigma_W \quad (4.3)$$

und

$$UCL = \mu_W + 3 \cdot \sigma_W \quad (4.4)$$

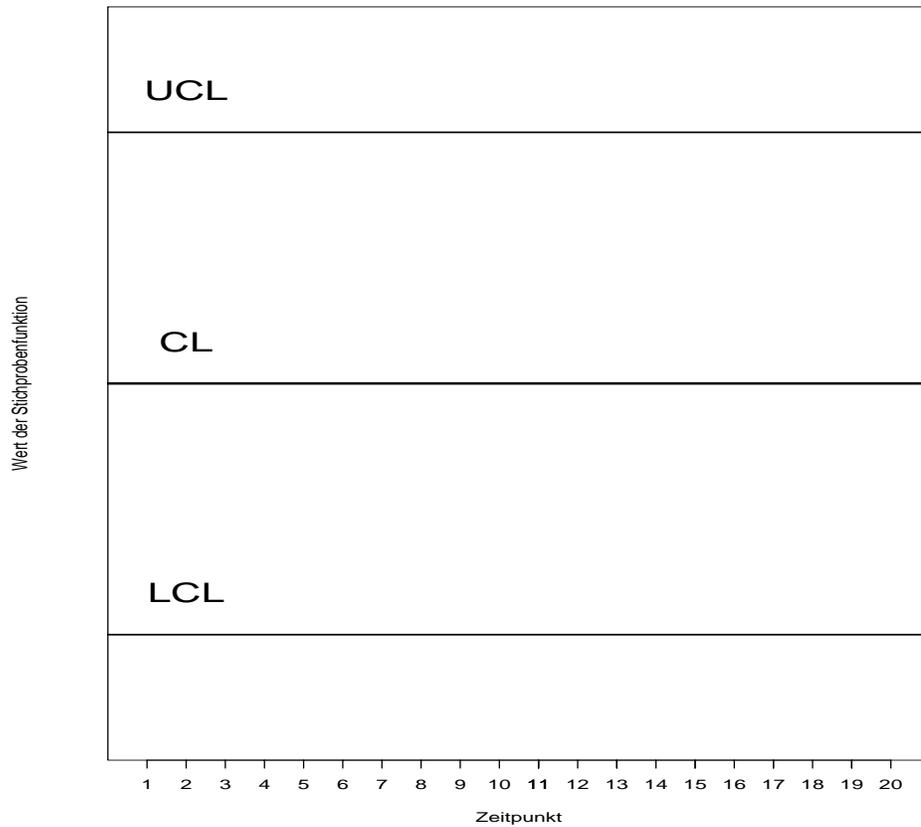
Außerdem wird noch die center line  $CL = \mu_W$  oder Mittellinie  $M$  eingezeichnet.

Abbildung 4.1 zeigt den typischen Aufbau einer Qualitätsregelkarte.

Von Shewhart wurde folgende einfache Regel vorgeschlagen:

Ist der Wert  $w_t$  der Stichprobenfunktion  $W_t$  im Zeitpunkt  $t$  kleiner als der LCL oder größer als der UCL, dann gehen wir davon aus, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist. Er muss dann angehalten werden, der Fehler gesucht und beseitigt werden.

Abbildung 4.1: Aufbau einer Qualitätsregelkarte



## 4.2 Die $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen

In der Regel werden  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  unbekannt sein. Dann muss man sie schätzen. Damit werden wir uns später beschäftigen. Wir gehen zunächst davon aus, dass  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  bekannt sind, und betrachten eine Qualitätsregelkarte, mit der überprüft werden soll, ob das Niveau eines Prozesses unter Kontrolle ist. Man spricht von der  **$\bar{X}$ -Karte**.

Wir werden später sehen, dass eine Vielzahl von Gründen dafür spricht zu einem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n > 1$  zu ziehen. In der Massenproduktion ist dies leicht zu realisieren.

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Der Bäcker backt in der Regel mehrere Brötchen.

Oft ist es nicht möglich, zu einem Zeitpunkt mehr als einen Wert zu beobachten.

### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer fährt jeden Morgen nur einmal zur Arbeit.

Wenn zu einem Zeitpunkt  $t$  dem Prozess nur eine Beobachtung entnommen wird, so wählt man als Stichprobenfunktion  $W_t$  die Beobachtung  $X_t$ ,

### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Da  $n$  gleich 1 ist, gilt  $w_t = x_t$ .

Ist hingegen der Stichprobenumfang  $n$  im Zeitpunkt  $t$  größer als 1, so wird man als Stichprobenfunktion den Mittelwert der Beobachtungen im Zeitpunkt  $t$  wählen.

Ist  $x_{tj}$  die  $j$ -te Beobachtung in der  $t$ -ten Stichprobe, so bilden wir

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} \quad (4.5)$$

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Da  $n$  gleich 2 ist, gilt  $w_t = 0.5(x_{t1} + x_{t2})$ . In Tabelle 4.1 werden die Werte bestimmt.

Tabelle 4.1: Hilfstabelle zur Erstellung einer Qualitätsregelkarte

$t$	$x_{t1}$	$x_{t2}$	$\bar{x}_t$
1	72	70	71.0
2	72	66	69.0
3	69	67	68.0
4	70	72	71.0
5	68	70	69.0
6	71	69	70.0
7	69	66	67.5
8	66	72	69.0
9	67	71	69.0
10	74	66	70.0
11	72	72	72.0
12	71	71	71.0
13	69	67	68.0
14	70	72	71.0
15	71	72	71.5
16	69	69	69.0
17	72	75	73.5
18	71	68	69.5
19	74	68	71.0
20	72	68	70.0

Nun benötigen wir noch die Grenzen der Karte. Da wir davon ausgehen, dass die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  des Prozesses bekannt sind, gilt wegen  $W_t = X_t$  für  $n = 1$

$$\mu_W = E(W_t) = E(X_t) = \mu \quad (4.6)$$

und

$$\sigma_W^2 = Var(W_t) = Var(X_t) = \sigma^2 \quad (4.7)$$

Setzen wir die Gleichungen (4.6) und (4.7) in die Gleichungen (4.3) und (4.4) auf Seite 24 ein, so erhalten wir die Grenzen:

$$LCL = \mu - 3 \cdot \sigma \quad (4.8)$$

$$CL = \mu \quad (4.9)$$

$$UCL = \mu + 3 \cdot \sigma \quad (4.10)$$

### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer weiß, dass gilt  $\mu = 30$  und  $\sigma = 2$ . Also gilt

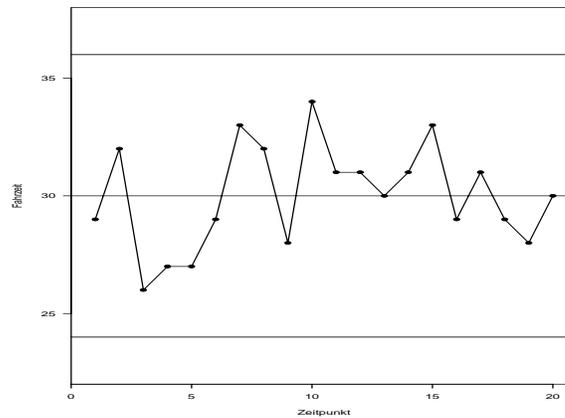
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 = 24$$

$$CL = 30$$

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 = 36$$

Die Qualitätsregelkarte ist in Abbildung 4.2 zu finden.

Abbildung 4.2: Qualitätsregelkarte der Fahrzeit



Offensichtlich ist der Prozess unter Kontrolle.

Ist  $n > 1$ , so müssen wir uns die Eigenschaften von  $\bar{X}$  anschauen. Es gilt

$$\mu_W = E(W_t) = E(\bar{X}) = \mu \quad (4.11)$$

und

$$\sigma_W^2 = Var(W_t) = Var(\bar{X}) = \sigma^2/n \quad (4.12)$$

Setzen wir die Gleichungen (4.11) und (4.12) in die Gleichungen (4.3) und (4.4) auf Seite 24 ein, so erhalten wir die Grenzen:

$$LCL = \mu - 3 \cdot \sigma/\sqrt{n} \quad (4.13)$$

$$CL = \mu \quad (4.14)$$

$$UCL = \mu + 3 \cdot \sigma/\sqrt{n} \quad (4.15)$$

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Der Bäcker weiß, dass gilt  $\mu = 70$  und  $\sigma = 2$ . Also gilt

$$LCL = 70 - 3 \cdot 2/\sqrt{2} = 65.76$$

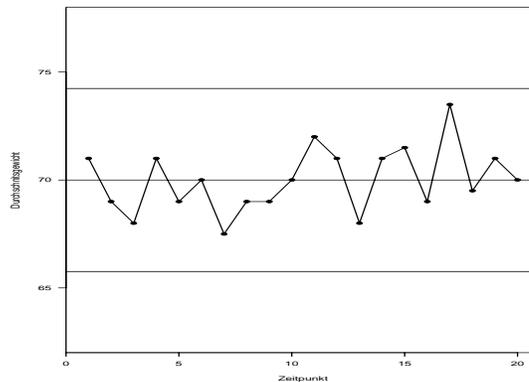
$$CL = 70$$

$$UCL = 70 + 3 \cdot 2/\sqrt{2} = 74.24$$

Nun zeichnet man die Grenzen in den Run-Chart und erhält die Qualitätsregelkarte. Ist ein Wert der Stichprobenfunktion  $\bar{X}$  kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$ , so gehen wir davon aus, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist.

Die Qualitätsregelkarte ist in Abbildung 4.3 zu finden. Offensichtlich ist der Prozess unter Kontrolle.

Abbildung 4.3: Qualitätsregelkarte des Durchschnittsgewichtes von zwei Brötchen



Die Abbildung links oben in Abbildung 4.5 auf Seite 33 zeigt einen Prozess, der nicht unter Kontrolle ist.

Wieso spricht ein Wert der Stichprobenfunktion, der kleiner als der  $LCL$  oder größer als  $UCL$  ist dafür, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist?

Schauen wir uns zur Beantwortung dieser Frage an, wie Shewart vorgegangen ist. Dieser formulierte die Entscheidungsregel als statistische Hypothesen:

$H_0$ : Der Prozess ist unter Kontrolle

$H_1$ : Der Prozess ist nicht unter Kontrolle

die Teststatistik zur Überprüfung der Hypothesen ist  $W_t = \bar{X}$ .  
Die Entscheidungsregel lautet:

Entscheidung für  $H_1$ , wenn  $W_t < LCL$  oder  $W_t > UCL$ .

Entscheidung für  $H_0$ , wenn  $LCL \leq W_t \leq UCL$ .

Bei einem statistischen Test können zwei Fehler begangen werden:

Man begeht einen Fehler 1. Art, wenn man sich für  $H_1$  entscheidet, obwohl  $H_0$  zutrifft.

Man begeht einen Fehler 2. Art, wenn man sich für  $H_0$  entscheidet, obwohl  $H_1$  zutrifft.

Die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art wird in der Regel vorgegeben. Man wählt einen kleinen Wert. Dann kann man sich ziemlich sicher sein, eine richtige Entscheidung getroffen zu haben, wenn man  $H_0$  ablehnt. Denn die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung ist klein.

In unserem Fall können wir die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art berechnen, wenn wir Normalverteilung von  $W_t$  unterstellen. Ist die Stichprobenfunktion  $W_t$  gleich  $\bar{X}$  und der Stichprobenumfang  $n$  relativ groß, so ist  $\bar{X}$  auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes approximativ normalverteilt. Dies ist der erste Grund für  $n > 1$ .

Wir gehen also davon aus, dass  $W_t$  mit den Parametern  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  normalverteilt ist, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. In diesem Fall gilt

$$\alpha = \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \tag{4.16}$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Diese ist in den Tabellen A.3 und A.4 auf den Seiten 82 und 83 tabelliert. Wir entnehmen Tabelle A.3:

$$\Phi(3) = 0.99865.$$

Da bei Standardnormalverteilung gilt

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

folgt

$$\Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135.$$

Somit gilt

$$\alpha = 0.0027$$

Ist der Prozess also unter Kontrolle, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 0.0027, sich dafür zu entscheiden, dass er nicht unter Kontrolle ist. Entscheiden wir uns also dafür, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist, so können wir uns sehr sicher sein, dass unsere Entscheidung richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung beträgt ja nur 0.0027.

Schauen wir uns an, warum Gleichung (4.16) auf Seite 30 erfüllt ist.

Ein Fehler 1. Art wird begangen, wenn  $\bar{X}$  kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$  ist und der Prozess unter Kontrolle ist, also  $H_0$  zutrifft. Somit gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= P(W_t < LCL | H_0) + P(W_t > UCL | H_0) \\ &= P(W_t < \mu_W - 3 \cdot \sigma_W | H_0) + P(W_t > \mu_W + 3 \cdot \sigma_W | H_0) \\ &= P(W_t < \mu_W - 3 \cdot \sigma_W | H_0) + 1 - P(W_t \leq \mu_W + 3 \cdot \sigma_W | H_0) \\ &= P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < -3 | H_0\right) + 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < 3 | H_0\right) \end{aligned}$$

Trifft  $H_0$  zu, so ist der Prozess unter Kontrolle und  $W_t$  ist mit den Parametern  $\mu_W$  und  $\sigma_W$  normalverteilt. Also ist

$$Z = \frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W}$$

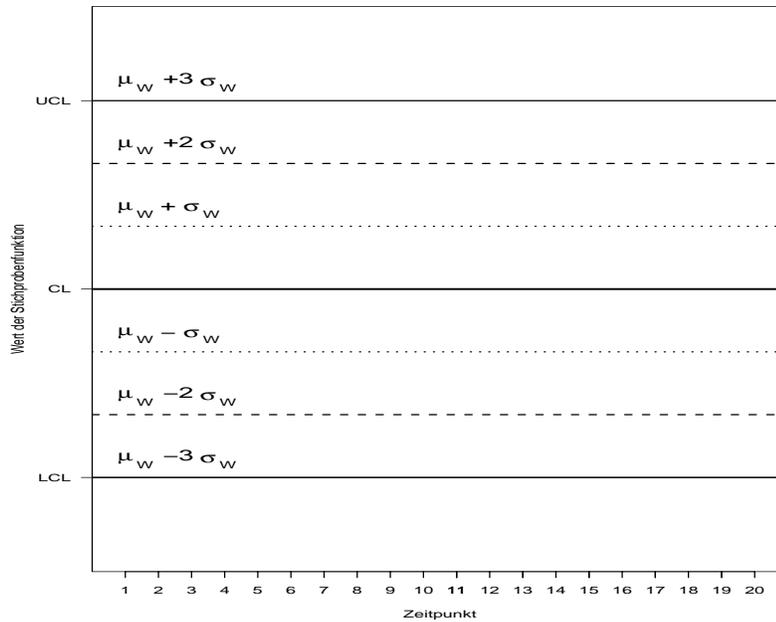
standardnormalverteilt mit der Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$ .

Somit gilt

$$\begin{aligned} P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < -3\right) + 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} < 3\right) &= P(Z < -3) + 1 - P(Z < 3) \\ &= \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \end{aligned}$$

Bevor wir uns in Kapitel 4.3 auf Seite 35 die Wahrscheinlichkeit des Fehler 2. Art näher anschauen, betrachten wir einige andere Entscheidungsregeln, die von Western Electric vorgeschlagen wurden. Bei diesen Regeln ergänzt man die Qualitätsregelkarte um weitere Grenzen. Man legt um die Mittellinie Parallelen im Abstand  $\sigma_W$  und  $2\sigma_W$ . Abbildung 4.4 zeigt die Karte mit den Grenzen.

Abbildung 4.4: Qualitätsregelkarte mit zusätzlichen Grenzen

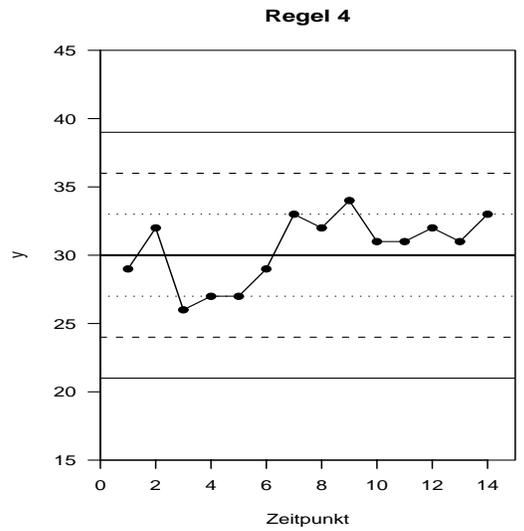
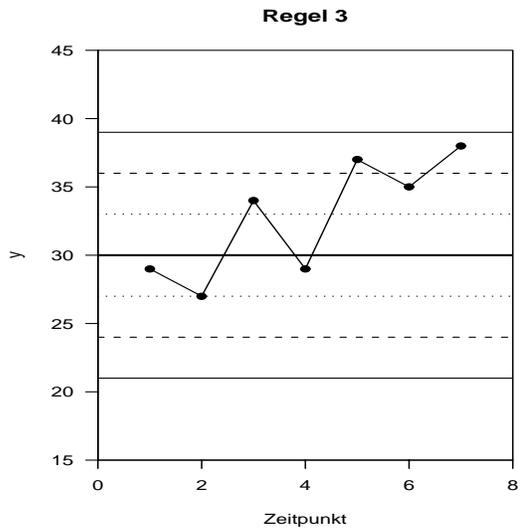
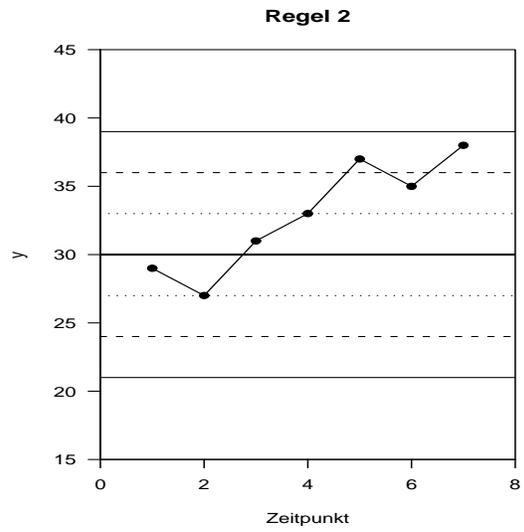
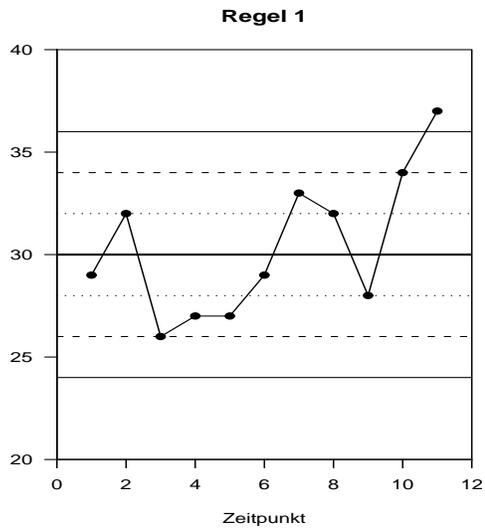


Zusätzlich zur Regel von Shewhart geht man davon aus, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist, wenn

2. mindestens zwei von drei aufeinander folgenden Punkten auf einer Seite der Mittellinie außerhalb der  $2\sigma_W$  Warngrenzen liegen,
3. oder mindestens vier von fünf aufeinander folgenden Punkten auf einer Seite der Mittellinie außerhalb der  $1\sigma_W$  Grenzen liegen
4. oder 8 aufeinander folgende Punkte auf einer Seite der Mittellinie liegen.

Abbildung 4.5 zeigt Beispiele für die vier Regeln.

Abbildung 4.5: Regeln für Qualitätsregelkarten



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art bei den drei zusätzlichen Regeln?

Schauen wir uns zunächst Regel 2 an. Wir betrachten zunächst den Fall, dass mindestens 2 von drei aufeinander folgenden  $W_t$  größer als  $\mu_W + 2\sigma_W$  sind. Wenn der Prozess unter Kontrolle ist, so gilt für ein  $W_t$ :

$$\begin{aligned} P(W_t > \mu_W + 2\sigma_W) &= 1 - P(W_t \leq \mu_W + 2\sigma_W) \\ &= 1 - P\left(\frac{W_t - \mu_W}{\sigma_W} \leq 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

Sei  $Y$  die Anzahl unter den drei  $W_t$ , die größer als  $\mu_W + 2\sigma_W$  sind. Ist der Prozess unter Kontrolle, so ist  $Y$  binomialverteilt mit den Parametern  $n = 3$  und  $p = 0.02275$ . Gesucht ist  $P(Y \geq 2)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) = 3 \cdot 0.02275^2 \cdot 0.97725 + 0.02275^3 \\ &= 0.00154 \end{aligned}$$

Für die andere Seite der Mittellinie erhält man denselben Wert. Also gilt  $\alpha = 2 \cdot 0.00154 = 0.00308$ .

Für Regel 3 liefern analoge Überlegungen  $\alpha = 0.00553$ .

Schauen wir noch die vierte Regel an. Ist der Prozess unter Kontrolle, so beträgt die Wahrscheinlichkeit 0.5, dass ein  $W_t$  Beobachtung auf einer Seite der Mittellinie liegt. Da die  $W_t$  unabhängig sind, wenn der Prozess unter Kontrolle ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 8 aufeinander folgende Beobachtungen auf einer Seite der Mittellinie liegen:

$$0.5^8 = 0.0039$$

Also gilt  $\alpha = 0.0078$ .

Kehren wir noch einmal zur Shewhart-Karte zurück. Wählen wir in den Gleichungen (4.1) und (4.2) auf Seite 24 für  $K$  einen anderen Wert, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Setzen wir  $K = 3.09$ , so entnehmen wir Tabelle A.4 auf Seite 83, dass  $\Phi(3.09) = 0.999$  gilt. Also gilt

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \phi(3.09)) = 2 \cdot (1 - 0.999) = 0.002$$

In Großbritannien setzt man  $K = 3.09$ .

### 4.3 Die OC-Funktion und ARL

Überprüfen wir die Lage des Prozesses, so nimmt der Lageparameter  $\mu$  einen speziellen Wert  $\mu_0$  an, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Aus diesem Grund ist die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  des Fehlers 1. Art eindeutig definiert. Ist der Prozess aber nicht mehr unter Kontrolle, so gibt es unendlich viele Werte von  $\mu$ , die in Frage kommen. Somit hängt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art davon ab, welchen Wert  $\mu_1$  annimmt, wenn der Prozess nicht unter Kontrolle ist. Wir wollen im Folgenden bestimmen, wie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art von  $\mu_1$  abhängt, wenn wir die  $\bar{X}$ -Karte mit bekannten Grenzen verwenden. Für die Grenzen der Qualitätsregelkarte gilt also

$$\begin{aligned} LCL &= \mu_0 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \\ CL &= \mu_0 \\ UCL &= \mu_0 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \end{aligned}$$

Nun mögen sich die Lage des Prozesses zum Wert  $\mu_1 \neq \mu_0$  verschieben, während die Varianz  $\sigma^2$  sich nicht ändert. Also trifft  $H_1$  zu.

Da  $\mu_1$  der Wert von  $\mu$  ist, ist  $\bar{X}$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1$  und  $\sigma / \sqrt{n}$  und damit

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (4.17)$$

standardnormalverteilt.

Ein Fehler 2. Art wird begangen, wenn wir entscheiden, dass der Prozess unter Kontrolle ist,  $\mu_1$  aber ungleich  $\mu_0$  ist.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art ist also

$$\begin{aligned} OC(\mu_1) &= P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL | H_1) \\ &= P(\mu_0 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} | H_1) \\ &= P(\mu_0 - \mu_1 - 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq \bar{X} - \mu_1 \leq \mu_0 - \mu_1 + 3 \cdot \sigma / \sqrt{n} | H_1) \\ &= P\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3 \leq \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3 | H_1\right) \\ &\stackrel{(4.17)}{=} P\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3 \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} - 3\right) \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  der Wert der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle  $z$ .

Man  $OC(\mu_1)$  auch die **Operationscharakteristik** an der Stelle  $\mu_1$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art in Abhängigkeit von  $\mu_1$  an.

Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art gilt also:

$$OC(\mu_1) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - 3\right) \quad (4.18)$$

### Beispiel 6

Die Fahrzeit des Arbeitnehmers sei normalverteilt mit Erwartungswert 30 und Varianz 4. Der Erwartungswert der Fahrzeit verschiebt sich zum Wert 32. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte dies bei der nächsten Fahrt nicht bemerkt?

Es gilt  $\mu_0 = 30$ ,  $\sigma = 2$  und  $\mu_1 = 32$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} OC(32) &= \Phi\left(\frac{30 - 32}{2/\sqrt{1}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{30 - 32}{2/\sqrt{1}} - 3\right) = \Phi(2) - \Phi(-4) \\ &= 0.97725 \end{aligned}$$

Verschiebt sich die Lage hingegen zum Wert  $\mu_1 = 34$ , so gilt

$$\begin{aligned} OC(34) &= \Phi\left(\frac{30 - 34}{2/\sqrt{1}} + 3\right) - \Phi\left(\frac{30 - 34}{2/\sqrt{1}} - 3\right) = \Phi(1) - \Phi(-5) \\ &= 0.84134 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art kleiner wird, wenn die Lageverschiebung größer wird.

Die Lageverschiebung des Prozesses wird entdeckt, wenn  $\bar{X}$  einen Wert annimmt, der kleiner als der  $LCL$  oder größer als der  $UCL$  ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$G(\mu_1) = 1 - OC(\mu_1) \quad (4.19)$$

Man nennt  $G(\mu_1)$  auch die **Gütefunktion** an der Stelle  $\mu_1$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Stichprobe eine Lageverschiebung zum Wert  $\mu_1$  zu entdecken.

### Beispiel 6 (fortgesetzt)

Es gilt

$$G(32) = 1 - OC(32) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

Verschiebt sich die Lage hingegen zum Wert  $\mu_1 = 34$ , so gilt

$$G(34) = 1 - OC(34) = 1 - 0.84134 = 0.15866$$

Wir sehen, dass die Gütefunktion größer wird, wenn die Lageverschiebung größer wird.

Wir können nun auch die Frage beantworten, warum man zu einem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n > 1$  ziehen sollte. Die Wahrscheinlichkeit, einen Lageunterschied zu entdecken, ist für  $n > 1$  größer als für  $n = 1$ . Schauen wir uns dies für ein Beispiel an.

### Beispiel 7

Das Gewicht  $X$  eines Brötchens sei normalverteilt mit  $E(X) = 70$  und  $Var(X) = 4$ , wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Die Lage des Prozesses verschiebt sich zum Wert 72. Es gilt  $\mu_0 = 70$ ,  $\sigma = 2$  und  $\mu_1 = 72$ .

Ist  $n = 1$ , so gilt

$$\begin{aligned} G(72) &= 1 - \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{1}} + 3\right) + \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{1}} - 3\right) \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-4) = 1 - 0.99725 = 0.00275 \end{aligned}$$

Ist  $n = 4$ , so gilt

$$\begin{aligned} G(72) &= 1 - \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{4}} + 3\right) + \Phi\left(\frac{70 - 72}{2/\sqrt{4}} - 3\right) \\ &= 1 - \Phi(1) + \Phi(-5) = 1 - 0.84134 = 0.15866 \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Frage beantworten, wie lange man im Mittel warten muss, bis die  $\bar{X}$ -Karte eine Lageverschiebung zum Wert  $\mu_1$  entdeckt. Hierzu betrachten wir die Zufallsvariable  $V$ , die die Anzahl der Stichproben zählt, bis  $\bar{X}$  zum ersten Mal außerhalb des Intervalls  $[LCL, UCL]$  liegt.

Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $\bar{X}$  außerhalb des Intervalls  $[LCL, UCL]$  liegt.

dann ist  $V$  geometrisch verteilt mit dem Parameter  $p$ . Für  $v = 1, 2, \dots$  gilt also

$$P(V = v) = (1 - p)^{v-1} p. \quad (4.20)$$

Die Gültigkeit von Gleichung (4.20) macht man sich folgendermaßen klar:

Bei jeder Stichprobe gibt es zwei Möglichkeiten. Der Mittelwert liegt im Intervall  $[LCL, UCL]$  oder liegt nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass er nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$  liegt, ist gleich  $p$ . Wir warten so lange, bis eine Beobachtung zum ersten Mal nicht im Intervall  $[LCL, UCL]$  liegt. Wenn dies bei der  $v$ -ten Stichprobe zum ersten Mal geschieht, müssen alle  $v - 1$  Mittelwerte vor dieser Stichprobe im Intervall  $[LCL, UCL]$  gelegen haben. Da wir Unabhängigkeit unterstellen, gilt

$$P(V = v) = \underbrace{(1 - p) \cdot (1 - p) \cdot \dots \cdot (1 - p)}_{v-1 \text{ Faktoren}} = (1 - p)^{v-1} p.$$

**Beispiel 6 (fortgesetzt)**

Die mittlere Fahrzeit hat sich zum Wert 32 verschoben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte dies bei der übernächsten Stichprobe bemerkt?

Wir wissen  $G(32) = 0.02275$ . Somit gilt

$$P(V = 2) = (1 - p) p = 0.97725 \cdot 0.02275 = 0.0223$$

Der Erwartungswert von  $V$  ist:

$$E(V) = \frac{1}{p}$$

Diese Größe nennt man auch die **ARL (average run length)**. Die *ARL* gibt an, wie lange man im Mittel warten muss, bis man eine vorgegebene Lageverschiebung entdeckt.

**Beispiel 6 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$ARL = \frac{1}{0.02275} = 43.96$$

Man benötigt also im Mittel 44 Beobachtungen

Man kann die *ARL* auch berechnen, wenn der Prozess unter Kontrolle ist. Man spricht dann von der in-control  $ARL_0$ . Diese berechnet man folgendermaßen: Es gilt

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{4.21}$$

Sie gibt an, wie lange man im Mittel warten muss, bis die Karte einen Fehlalarm gibt.

Bei der klassischen Shewhart-Karte mit  $K = 3$  gilt  $\alpha = 0.0027$ . Also gilt

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370.4$$

Verwendet man hingegen  $K = 3.09$ , so erhält man

$$ARL_0 = \frac{1}{0.002} = 500$$

Wir schauen uns nun die klassische Shewhart-Karte mit  $K = 3$  und betrachten für  $n = 1$  eine Verschiebung der Lage um  $k$  Standardabweichungen. Es gilt also

$$\mu_1 = \mu_0 + k \cdot \sigma.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (4.19) auf Seite 36 ein, so erhalten wir

$$G(\mu_0 + k \cdot \sigma) = 1 - \Phi(3 - k) + \Phi(-3 - k)$$

In Tabelle 4.2 ist die ARL in Abhängigkeit von  $k$  zu finden.

Tabelle 4.2: ARL in Abhängigkeit von  $k$

$k$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$ARL$	370.4	155.2	43.9	15.0	6.3	3.2	2.0

Wir sehen, dass die  $\bar{X}$ -Karte sehr lange Zeit benötigt, um kleine Lageunterschiede aufzudecken. Bei großen Lageunterschieden ist sie hingegen sehr gut. Wir werden weiter hinten eine Qualitätsregelkarte betrachten, die kleine Lageunterschiede sehr schnell entdeckt.

## 4.4 Die $\bar{X}/R$ -Karte

Die Grenzen einer Qualitätsregelkarte hängen in der Regel von den Parametern des Prozesses ab. Will man zum Beispiel die  $\bar{X}$ -Karte aufstellen, so benötigt man die Werte von  $\mu$  und  $\sigma$ . Dies zeigen die Gleichungen (4.8), (4.9) und (4.10) auf Seite 27 für  $n = 1$  und Gleichungen (4.13), (4.14) und (4.15) auf Seite 28 für  $n > 1$ . Diese Parameter sind in der Regel unbekannt. Wir müssen sie schätzen. Hierzu beobachten wir den Prozess an  $T$  Zeitpunkten und bestimmen dann mit den geschätzten Parametern die Grenzen der Karte. Anschließend wird mit den Werten, aus denen die Parameter geschätzt wurden, überprüft, ob der Prozess unter Kontrolle ist. Ist dies der Fall, so kann man die Karte übernehmen.

Wir wollen im Folgenden zwei Karten erstellen. Mit der  $\bar{X}$ -Karte überprüft man die Lage des Prozesses und mit der  $R$ -Karte die Streuung. Dabei erheben wir zu  $T$  Zeitpunkten entweder eine Beobachtung oder  $n$  Beobachtungen mit  $n > 1$ . Die Schätzung der Parameter ist für die beiden Situationen unterschiedlich.

### 4.4.1 Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n > 1$

Wir wollen die  $\bar{X}$ -Karte für  $n > 1$  aufstellen. Hierzu müssen wir  $\mu$  und  $\sigma$  schätzen. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  beobachten wir  $n$  Realisationen des interessierenden Merkmals. Sei  $x_{tj}$  der Wert der  $j$ -ten Beobachtung zum Zeitpunkt  $t$ .

#### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Ein Bäcker bestimmt nach jedem Backvorgang das Gewicht von 2 Brötchen. Bei 20 Backvorgängen erhält er die Werte in Tabelle 4.1 auf Seite 27.

Beginnen wir mit der Schätzung von  $\mu$ . Für jede Stichprobe berechnen wir den Mittelwert

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} \quad (4.22)$$

#### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Es gilt  $x_{11} = 72$  und  $x_{12} = 70$ . Hieraus folgt

$$\bar{x}_1 = \frac{72 + 70}{2} = 71$$

Analog erhalten wir die anderen Werte. In der vierten Spalte von Tabelle 4.3 auf Seite 41 sind die Mittelwert der Stichproben zu finden.

Tabelle 4.3: Hilfstabelle zur Erstellung einer Qualitätsregelkarte

$t$	$x_{t1}$	$x_{t2}$	$\bar{x}_t$	$R_t$
1	72	70	71.0	2
2	72	66	69.0	6
3	69	67	68.0	2
4	70	72	71.0	2
5	68	70	69.0	2
6	71	69	70.0	2
7	69	66	67.5	3
8	66	72	69.0	6
9	67	71	69.0	4
10	74	66	70.0	8
11	72	72	72.0	0
12	71	71	71.0	0
13	69	67	68.0	2
14	70	72	71.0	2
15	71	72	71.5	1
16	69	69	69.0	0
17	72	75	73.5	3
18	71	68	69.5	3
19	74	68	71.0	6
20	72	68	70.0	4

Aus  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_T$  berechnen wir

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{x}_t \quad (4.23)$$

Dies ist gleich dem Mittelwert aller Beobachtungen:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{x}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} = \frac{1}{n \cdot T} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n x_{tj}$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$\bar{\bar{x}} = \frac{71 + 69 + 68 + \dots + 71.0 + 70.0}{20} = 70$$

Nun benötigen wir noch einen Schätzer von  $\sigma$ . Hierzu schätzen wir zuerst  $\sigma$  für jede Stichprobe. Wir können die Stichprobenstandardabweichung oder die Spannweite als Schätzer von  $\sigma$  wählen. Wir schauen uns hier die Spannweite an:

$$R_t = \max\{x_{t1}, \dots, x_{tn}\} - \min\{x_{t1}, \dots, x_{tn}\} \quad (4.24)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Es gilt  $x_{11} = 72$  und  $x_{12} = 70$ . Hieraus folgt

$$R_1 = 72 - 70 = 2$$

Analog erhalten wir die anderen Werte. In der fünften Spalte von Tabelle 4.3 auf Seite 41 sind die Spannweiten der Stichproben zu finden.

Wie bei den Mittelwerten der Stichproben bestimmen wir nun den Mittelwert der Spannweiten.

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t. \quad (4.25)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$\bar{R} = \frac{2 + 6 + 2 + \dots + 6 + 4}{20} = 2.9$$

Nun ist  $\bar{R}$  keine erwartungstreue Schätzfunktion von  $\sigma$  bei Normalverteilung. Ein bei Normalverteilung erwartungstreuer Schätzer von  $\sigma$ , der auf  $\bar{R}$  beruht, ist

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (4.26)$$

Wie man die Konstante  $d_2$  bestimmt, wird in Kapitel 4.4.3 gezeigt. Die Werte von  $d_2$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden.

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Für  $n = 2$  gilt  $d_2 = 1.128$ . Also erhalten wir

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{2.9}{1.128} = 2.57.$$

Mit Hilfe von  $\bar{\bar{x}}$  und  $\bar{\bar{R}}$  können wir die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte und der  $R$ -Karte bestimmen. Hierzu schätzen wir  $\mu$  durch  $\bar{\bar{x}}$  und  $\sigma$  durch  $\bar{\bar{R}}/d_2$ .

Die geschätzten Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = \bar{\bar{x}} - 3 \cdot \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \quad (4.27)$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \quad (4.28)$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3 \cdot \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2 \cdot \sqrt{n}} \quad (4.29)$$

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Die geschätzten Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = 70 - 3 \cdot \frac{2.57}{\sqrt{2}} = 64.55$$

$$CL = 70$$

$$UCL = 70 + 3 \cdot \frac{2.57}{\sqrt{2}} = 75.45$$

Wir können die Grenzen noch anders darstellen. Sei

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \cdot \sqrt{n}}.$$

In Abhängigkeit von  $A_2$  lauten die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte:

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}}$$

$$CL = \bar{\bar{x}}$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}}$$

Die Werte von  $A_2$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden.

**Beispiel 5 (fortgesetzt)**

Für  $n = 2$  gilt  $A_2 = 1.88$ . Wir bestätigen die Werte der Grenzen

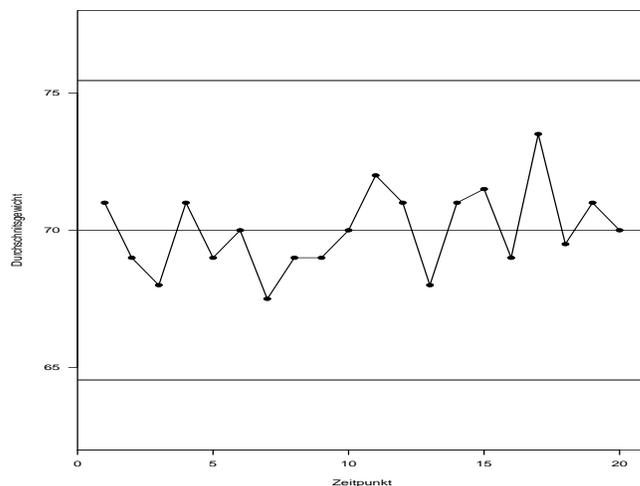
$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{\bar{R}} = 70 - 1.88 \cdot 2.9 = 64.55$$

$$CL = \bar{\bar{x}} = 70$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{\bar{R}} = 70 + 1.88 \cdot 2.9 = 75.45$$

Abbildung 4.6 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 4.6:  $\bar{X}$ -Karte für das Gewicht der Brötchen



Um die Streuung zu überprüfen, benutzen wir die Spannweite  $R$  einer Stichprobe vom Umfang  $n$ . Die Grenzen der Karte sind

$$LCL = E(R) - 3 \cdot \sqrt{Var(R)} \quad (4.30)$$

$$CL = E(R) \quad (4.31)$$

$$UCL = E(R) + 3 \cdot \sqrt{Var(R)} \quad (4.32)$$

Wir benötigen erwartungstreue Schätzer von  $E(R)$  und  $\sqrt{Var(R)}$ . Offensichtlich ist  $\bar{R}$  eine erwartungstreue Schätzfunktion von  $E(R)$ .

Eine erwartungstreue Schätzfunktion für  $\sqrt{Var(R)}$  ist

$$\frac{d_3}{d_2} \bar{R}$$

Die Konstanten  $d_2$  und  $d_3$  sind in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden. Die Herleitung der Konstanten ist in Kapitel 4.4.3 ab Seite 49 zu finden.

Wir erhalten also folgende geschätzte Grenzen für die  $R$ -Karte:

$$LCL = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (4.33)$$

$$CL = \bar{R} \quad (4.34)$$

$$UCL = LCL = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (4.35)$$

Wir können die Grenzen in den Gleichungen (4.33) und (4.35) noch vereinfachen und erhalten:

$$LCL = D_3 \bar{R} \quad (4.36)$$

$$UCL = D_4 \bar{R} \quad (4.37)$$

Dabei gilt

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$$

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

Die Werte von  $D_3$  und  $D_4$  sind für unterschiedliche Stichprobenumfänge in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden.

### Beispiel 5 (fortgesetzt)

Es gilt  $\bar{R} = 2.9$ . Für  $n = 2$  gilt  $D_3 = 0$  und  $D_4 = 3.267$ . Somit erhalten wir

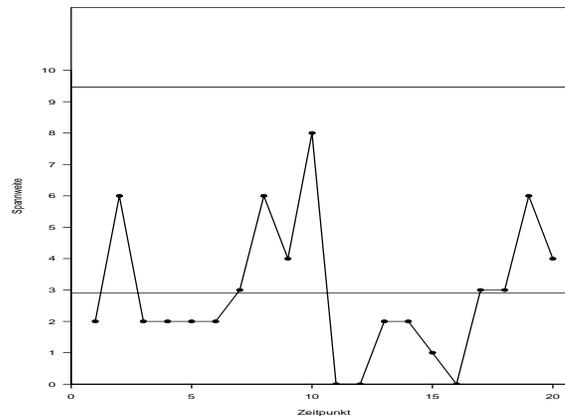
$$LCL = D_3 \bar{R} = 0 \cdot 2.9 = 0$$

$$CL = \bar{R} = 2.9$$

$$UCL = D_4 \bar{R} = 3.267 \cdot 2.9 = 9.47$$

Abbildung 4.7 zeigt die  $R$ -Karte.

Abbildung 4.7:  $R$ -Karte für das Gewicht der Brötchen



Bei beiden Karten sind die Prozesse unter Kontrolle, sodass die Karten benutzt werden können.

#### 4.4.2 Die $\bar{X}/R$ -Karte für $n = 1$

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wird genau ein Wert beobachtet. Es fallen also die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_T$  an.

##### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Ein Arbeitnehmer notiert an 20 aufeinander folgenden Werktagen die Fahrzeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Den Erwartungswert  $\mu$  schätzen wir durch den Mittelwert aller Beobachtungen

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad (4.38)$$

##### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Es gilt  $\bar{x} = 30$ .

Nun benötigen wir noch einen Schätzer für  $\sigma$ . Bei mehr als einer Beobachtung je Zeitpunkt berechnen wir die Spannweite dieser Beobachtungen. Für  $n = 1$  ist die Spannweite gleich 0. Um einen sinnvollen Wert für die Spannweite zu erhalten, benötigen wir mehr als eine Beobachtung. Dies ist möglich, wenn man die Spannweite aus benachbarten Beobachtungen berechnet. Sind also  $x_1, \dots, x_T$  die Werte des Prozesses, so betrachtet man die Paare  $(x_{t-1}, x_t)$  für  $t = 2, \dots, T$ . Für jedes Paar bestimmt man den Wert der Spannweite  $R_t = \max\{X_{t-1}, X_t\} - \min\{X_{t-1}, X_t\} = |X_t - X_{t-1}|$  für  $t = 2, \dots, T$ . Man spricht auch vom Moving-Range. Dann bestimmt man den Mittelwert  $\bar{R}$  der  $R_t$ :

$$\bar{R} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T R_t.$$

##### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Es gilt  $R_2 = |x_2 - x_1| = 3$ . Alle Werte sind

3 6 1 0 2 4 1 4 6 3 0 1 1 2 4 2 2 1 2

Es gilt  $\bar{R} = 2.37$ .

Einen erwartungstreuen Schätzer für  $\sigma$  erhält man dann durch  $\bar{R}/d_2$ . Da wir die Spannweite aus jeweils zwei Beobachtungen bestimmt haben, wählen wir  $d_2 = 1.128$ .

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 2.1$ .

Anstatt zwei aufeinander folgenden Beobachtungen könnte man natürlich im Zeitpunkt  $t$  auch drei aufeinander folgende Beobachtungen  $(x_{t-2}, x_{t-1}, x_t)$  bestimmen. Wir erhalten dann  $n - 2$  Spannweiten und dividieren deren Mittelwert durch  $d_2 = 1.693$ .

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Die ersten drei Beobachtungen sind 29, 32 und 26. Also gilt  $R_1 = 6$ . Alle Werte sind

6 6 1 2 6 4 5 6 6 3 1 1 3 4 4 2 3 2

Es gilt  $\bar{R} = 3.611$  und somit  $\hat{\sigma} = 3.611/1.693 = 2.13$ . Wir sehen, dass die Schätzung von  $\sigma$ , die auf der Spannweite von zwei Beobachtungen basiert, nahezu identisch mit der Schätzung von  $\sigma$  ist, die auf der Spannweite von drei Beobachtungen basiert

Wir verwenden im Folgenden die Schätzung von  $\sigma$ , die auf der Spannweite von zwei Beobachtungen basiert.

Da wir zu jedem Zeitpunkt nur eine Beobachtung erhoben haben, erhalten wir folgende Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte:

$$LCL = \bar{x} - 3 \hat{\sigma}$$

und

$$UCL = \bar{x} + 3 \hat{\sigma}$$

**Beispiel 4 (fortgesetzt)**

Es gilt

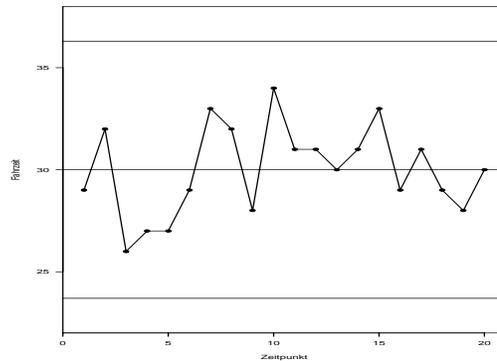
$$LCL = \bar{x} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2} = 30 - 3 \cdot 2.1 = 23.7$$

und

$$UCL = \bar{x} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2} = 30 + 3 \cdot 2.1 = 36.3.$$

Außerdem gilt  $CL = 30$ . Abbildung 4.8 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 4.8:  $\bar{X}$ -Karte für die Fahrzeit



Wir können die Moving ranges auch benutzen, um die Streuung des Prozesses zu überprüfen. Hiermit kann man aber erst im Zeitpunkt  $t = 2$  beginnen. Hier bestimmt man  $R_2 = |x_2 - x_1|$ . Die anderen Spannweiten sind  $R_t = |x_t - x_{t-1}|$ . Die Grenzen der Karten sind dann in den Gleichungen (4.36) und (4.37) auf der Seite 45 zu finden. Für  $n = 2$  gilt  $D_3 = 0$  und  $D_4 = 3.267$ .

#### Beispiel 4 (fortgesetzt)

Es gilt

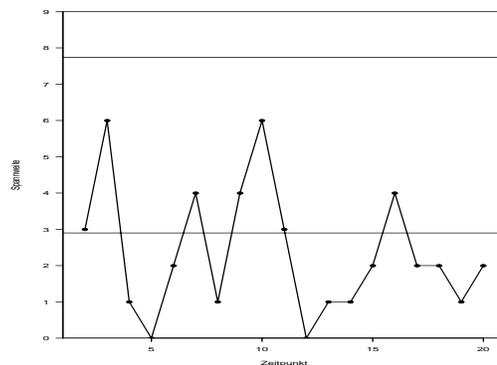
$$LCL = 0 \cdot 2.37 = 0$$

und

$$UCL = 3.267 \cdot 2.37 = 7.74.$$

Außerdem gilt  $CL = 2.32$ . Abbildung 4.9 zeigt die  $R$ -Karte.

Abbildung 4.9:  $R$ -Karte für die Fahrzeit



### 4.4.3 Die Bestimmung der Konstanten

Müssen  $\mu_T$  und  $\sigma_T$  bei der  $\bar{X}$ -Karte oder der  $R$ -Karte geschätzt werden, so hängen der  $LCL$  und der  $UCL$  von Konstanten wie  $d_2$  und  $A_2$  ab. Im Folgenden werden wir lernen, was diese Konstanten bedeuten. Beginnen wir mit der  $\bar{X}$ -Karte. Die Grenzen sind

$$LCL = \bar{\bar{x}} - 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \cdot \bar{R} \quad (4.39)$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \quad (4.40)$$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + 3 \cdot \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \cdot \bar{R} \quad (4.41)$$

Wir dividieren  $\bar{R}$  durch die Konstante  $d_2$ , um eine bei Normalverteilung erwartungstreue Schätzung zu erhalten. Es gilt

$$E(\bar{R}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(R_t)$$

Der Erwartungswert von  $\bar{R}$  hängt von den Erwartungswerten  $E(R_t)$  ab. Da wir annehmen, dass die Zufallsvariablen  $X_{tj}$  unabhängig und identisch mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  normalverteilt sind, sind auch die Zufallsvariablen  $R_1, \dots, R_T$  unabhängig und identisch verteilt. Es reicht also aus, den Erwartungswert und die Varianz von  $R_t$  zu bestimmen. Wir betrachten also im Folgenden die Spannweite  $R_X = X_{(n)} - X_{(1)}$  einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n$  aus einer Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ . Es gilt

$$E(R_X) \neq \sigma$$

Also gilt auch

$$E(\bar{R}) \neq \sigma$$

Warum ist  $R_X$  nicht erwartungstreu für  $\sigma$ ?

Ist die Zufallsvariablen  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  normalverteilt, so ist die Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

Für die Spannweite von  $Z$  gilt

$$R_Z = Z_{(n)} - Z_{(1)} = \frac{X_{(n)} - \mu}{\sigma} - \frac{X_{(1)} - \mu}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\sigma} = \frac{R_X}{\sigma} \quad (4.42)$$

Es gilt also

$$R_X = \sigma R_Z \quad (4.43)$$

und somit

$$E(R_X) = E(R_Z) \sigma \quad (4.44)$$

Den Wert von  $E(R_Z)$  kann man mit numerischer Integration oder auch mit Simulation bestimmen. Wir bezeichnen ihn mit  $d_2$ . In Tabelle A.1 sind die Werte von  $d_2$  für  $n = 2, 3, \dots, 10$  zu finden.

Wir sehen, dass  $E(R_Z)$  ungleich 0 ist. Somit ist  $\bar{R}$  nicht erwartungstreu für  $\sigma$ .

Gleichung(4.43) zeigt aber, wie man einen erwartungstreuen Schätzer von  $\sigma$  auf Basis von  $R_X$  erhält. Wir dividieren  $R_X$  durch  $E(R_Z)$ :

$$\hat{\sigma} = \frac{R_X}{E(R_Z)} \quad (4.45)$$

Es gilt

$$E(\hat{\sigma}) = E\left(\frac{R_X}{E(R_Z)}\right) = \frac{1}{E(R_Z)} E(R_X) \stackrel{(4.44)}{=} \frac{1}{E(R_Z)} E(R_Z) \sigma = \sigma$$

Setzen wir in den Gleichungen (4.39) und (4.41) auf Seite 49

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}},$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{\bar{R}} \\ UCL &= \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{\bar{R}} \end{aligned}$$

Die Werte von  $A_2$  sind in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden.

Bisher haben wir  $Var(R_X)$  noch nicht benötigt. Bei der  $R$ -Karte ist dies aber der Fall. Die Grenzen der  $R$ -Karte sind

$$\begin{aligned} LCL &= D_3 \cdot \bar{\bar{R}} \\ CL &= \bar{\bar{R}} \\ UCL &= D_4 \cdot \bar{\bar{R}} \end{aligned}$$

Schauen wir uns an, wie man diese Grenzen gewinnt. Mit  $T = R_X$  lauten die Grenzen der  $R$ -Karte

$$LCL = E(R_X) - 3\sqrt{Var(R_X)}$$

und

$$UCL = E(R_X) + 3\sqrt{Var(R_X)}$$

Als Schätzer für  $E(R_X)$  wählen wir  $\bar{R}$ . Wir benötigen noch einen Schätzer für  $\sigma_{R_X} = \sqrt{Var(R_X)}$ . Aus Gleichung (4.43) folgt

$$Var(R_X) \stackrel{(4.43)}{=} Var(\sigma R_Z) = \sigma^2 Var(R_Z) \quad (4.46)$$

und somit

$$\sigma_{R_X} = \sigma \sigma_{R_Z} \quad (4.47)$$

Da  $\sigma$  unbekannt ist, schätzen wir es durch

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Wir setzen  $d_3 = \sigma_{R_Z}$ . Die Werte von  $d_3$  sind in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden. Somit gilt

$$\hat{\sigma}_{R_X} = \hat{\sigma} d_3 = \frac{\bar{R}}{d_2} d_3 = \frac{d_3}{d_2} \bar{R} \quad (4.48)$$

Somit erhalten wir folgende Grenzen auf Basis der geschätzten Parameter:

$$LCL = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_3 \bar{R}$$

und

$$UCL = \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2}\right) \bar{R} = D_4 \bar{R}$$

Die Werte von  $D_3$  und  $D_4$  sind in Tabelle A.1 auf Seite 81 zu finden.

## 4.5 Qualitätsregelkarten für Zählvariablen

Bis jetzt haben wir Qualitätsregelkarten für stetige Merkmale erhoben. Oft betrachtet man aber eine Zählvariable. Ein Verteilungsmodell für Zählvariablen ist die Poissonverteilung. Eine mit dem Parameter  $\lambda$  poissonverteilte Zufallsvariable  $X$  besitzt für  $x = 1, 2, \dots$  folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (4.49)$$

Es gilt

$$E(X) = \lambda \quad (4.50)$$

und

$$Var(X) = \lambda \quad (4.51)$$

In der Regel werden zu jedem Zeitpunkt eine Stichprobe vom Umfang  $n = 1$  ziehen. Dann ist  $W_t = X_t$  mit

$$\mu_W = E(X) = \lambda \quad (4.52)$$

und

$$\sigma_W^2 = Var(X) = \lambda \quad (4.53)$$

Setzen wir die Gleichungen (4.52) und (4.53) in die Gleichungen (4.3) und (4.4) auf Seite 24 ein, so erhalten wir die Grenzen:

$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}$$

$$CL = \lambda$$

$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$

Ist der Parameter  $\lambda$  unbekannt, so schätzen wir ihn durch  $\bar{x}$  und erhalten folgende Grenzen:

$$LCL = \bar{x} - 3\sqrt{\bar{x}}$$

$$CL = \bar{x}$$

$$UCL = \bar{x} + 3\sqrt{\bar{x}}$$

Man bezeichnet die Karte auch als  $c$ -Karte.

### Beispiel 5

Ein Arzt bestimmt an 20 aufeinanderfolgenden Tagen die Anzahl der Patienten, die seine Praxis aufsuchen. Er erhält folgende Werte:

56 58 38 53 69 37 53 45 44 55 45 44 41 50 34 51 48 51 61 47

Es gilt  $\bar{x} = 49$ . Also lauten die Grenzen der  $c$ -Karte

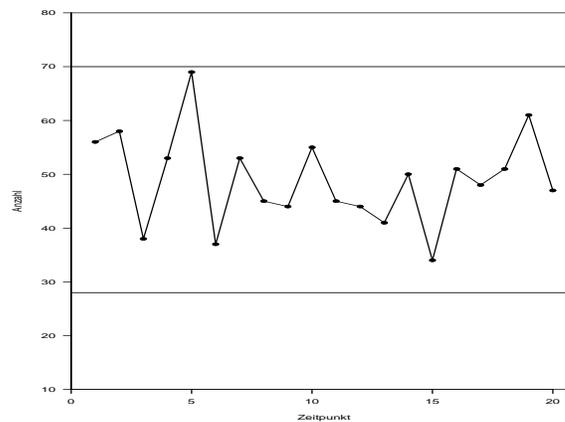
$$LCL = 49 - 3 \cdot 7 = 28$$

$$CL = 49$$

$$UCL = 49 + 3 \cdot 7 = 70$$

Abbildung 4.10 zeigt die Qualitätsregelkarte. Der Prozess ist unter Kontrolle.

Abbildung 4.10: Qualitätsregelkarte einer Zählvariablen



## 4.6 Einige Fragen zu Qualitätsregelkarten

Wir wollen im Folgenden einige Fragen beantworten die sich mit praktischen Problem bei Qualitätsregelkarten beschäftigen.

### Frage 1

Warum ist es sinnvoll, die Entscheidung über die Stabilität des Prozesses auf Basis mehrerer Beobachtungen zu fällen?

1. Die Grenzen basieren auf der Annahme, dass die Stichprobenfunktion normalverteilt ist. Für die Stichprobenfunktion  $\bar{X}$  ist dies auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes der Fall, wenn  $n$  hinreichend groß ist.
2. Die Gütefunktion  $G(\mu_1)$  ist monoton wachsend in  $n$ . Je größer der Stichprobenumfang ist, um so größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, eine Lageverschiebung zum Wert  $\mu_1$  zu entdecken. Wegen

$$ARL = \frac{1}{G(\mu_1)}$$

nimmt die mittlere Wartezeit bis zum Entdecken der Lageverschiebung mit wachsendem  $n$  ab.

3. Man erhält einen lokalen Schätzer der Standardabweichung. Dazu mehr in der Antwort zur zweiten Frage.

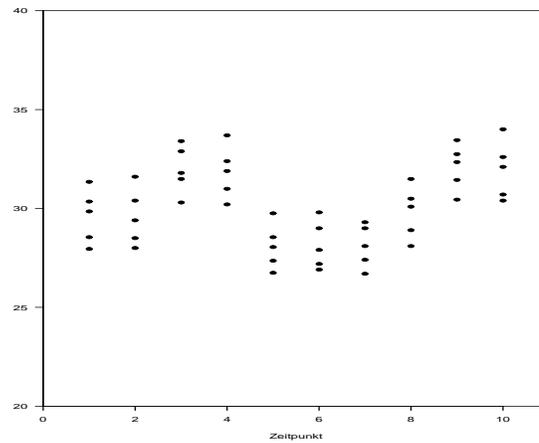
### Frage 2

Warum schätzt man die Standardabweichung nicht aus allen  $T \cdot n$  Beobachtungen?

Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  werden geschätzt, um die Grenzen der Karte aufzustellen. Im Schätzzeitraum sollte der Prozess natürlich unter Kontrolle sein, damit man die richtigen Grenzen verwendet. Dies bedeutet aber auch, dass die Karte im Schätzzeitraum merken sollte, wenn der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

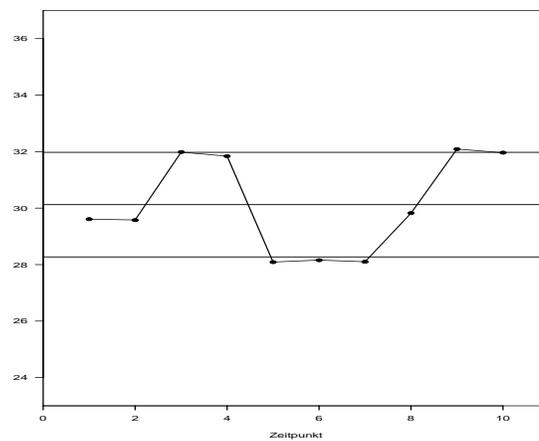
Abbildung 4.11 zeigt einen Prozess, bei dem sich das Niveau immer wieder ändert. Es ist offensichtlich hinsichtlich der Lage nicht unter Kontrolle.

Abbildung 4.11: Prozess mit unstabilem Niveau



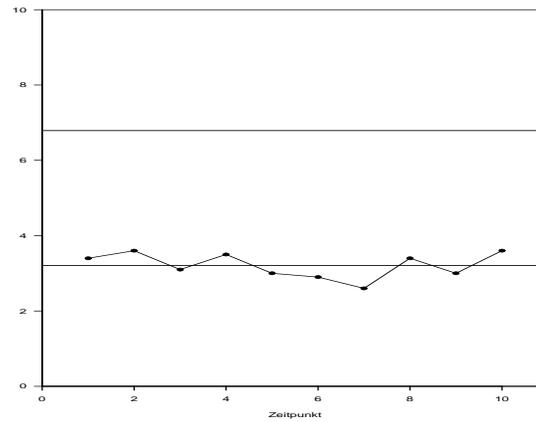
Wir betrachten zwei unterschiedliche Schätzer der Standardabweichung  $\sigma$ . Wir verwenden das in Kapitel 4.4.1 beschriebene Verfahren, d.h. wir benutzen die Gleichung 4.26 auf Seite 42. Wir erhalten die  $\bar{X}$ -Karte in Abbildung 4.12. Die Abbildung zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte entdeckt, dass das Niveau des Prozesses nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 4.12:  $\bar{X}$ -Karte



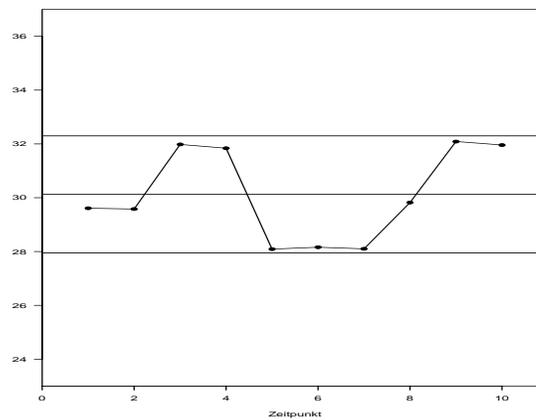
Die  $R$ -Karte in Abbildung 4.13 zeigt, dass die Variabilität des Prozesses unter Kontrolle ist.

Abbildung 4.13:  $R$ -Karte



Schätzt man hingegen die Standardabweichung aus der Spannweite aller 50 Beobachtungen, so überschätzt man sie. Abbildung 4.14 zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte in diesem Fall nicht entdeckt, dass das Niveau des Prozesses nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 4.14:  $\bar{X}$ -Karte



## 4.7 Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis

Die Tabelle mit den  $ARL$ -Werten zeigt, dass die  $\bar{X}$ -Karte kleine Lageunterschiede nicht schnell aufdecken kann. Das folgende Beispiel bestätigt dies.

### Beispiel 6

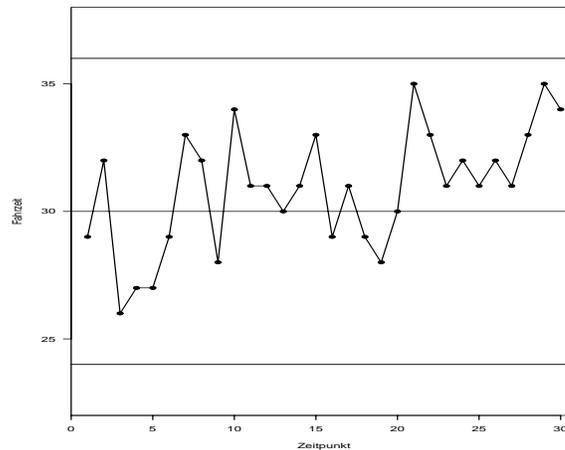
Wir betrachten wieder die Fahrzeit des Arbeitnehmers. Wir gehen davon aus, dass der Erwartungswert und die Varianz der Fahrzeit bekannt sind. Es gelte  $\mu = 30$  und  $\sigma^2 = 4$ . Da zu jedem Zeitpunkt nur ein Wert erhoben wird, gilt  $LCL = 24$  und  $UCL = 36$ .

Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugen wir 30 normalverteilte Zufallszahlen, wobei die ersten 20 Zufallszahlen aus der Normalverteilung mit Erwartungswert 30 und Standardabweichung 2 und die letzten 10 Beobachtungen aus der Normalverteilung mit Erwartungswert 32 und Standardabweichung 2 stammen. Hier sind die gerundeten Werte:

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33  
29 31 29 28 30 35 33 31 32 31 32 31 33 35 34

Abbildung 4.15 zeigt die  $\bar{X}$ -Karte.

Abbildung 4.15:  $\bar{X}$ -Karte



Die Karte deutet darauf hin, dass der Prozess unter Kontrolle ist. Wir wissen aber, dass dies nicht der Fall ist. Die Lage hat sich bei der 21-ten Stichprobe zum Wert  $\mu = 32$  verschoben. Dies ist eine Lageverschiebung um  $1\sigma$ . Die  $ARL$  der  $\bar{X}$ -Karte beträgt in diesem Fall 43.9.

Die  $\bar{X}$ -Karte bemerkt deshalb kleine Lageunterschiede nicht, da die Entscheidung nur auf einer Stichprobe beziehungsweise einer Beobachtung basiert. Berücksichtigt man hingegen die Information aufeinander folgender Stichproben, so entdeckt man den kleinen Lageunterschied viel schneller. So liegen die letzten 10 Beobachtungen in Abbildung 4.15 auf Seite 57 oberhalb der Mittellinie. Wendet man die vierte der Western Electric Regeln an, so bemerkt man, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten, die Information aufeinander folgender Beobachtungen zu berücksichtigen. Dies geschieht bei Qualitätsregelkarten mit Gedächtnis. Zu diesen gehören die *CUSUM*-Karte und die *EWMA*-Karte.

Wir wollen uns im Folgenden nur mit der *EWMA*-Karte beschäftigen.

### 4.7.1 Die *EWMA*-Karte

Wir gehen zunächst davon aus, dass der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  des Prozesses bekannt sind, wenn dieser unter Kontrolle ist. Wir bezeichnen den Lageparameter mit  $\mu_0$ . Außerdem gehen wir davon aus, dass  $n$  gleich 1 ist.

Die *EWMA*-Karte beruht auf der exponentiellen Glättung erster Ordnung. Bei dieser geht man von einer Zeitreihe  $x_1, x_2, \dots$  aus. Ziel ist es, im Zeitpunkt  $t$  den Wert  $x_{t+1}$  durch einen Wert  $\hat{x}_{t+1}$  zu prognostizieren. Für diese Prognose verwendet man den im Zeitpunkt  $t$  beobachteten Wert  $x_t$  und den im Zeitpunkt  $t - 1$  erstellten Prognosewert  $\hat{x}_t$ . Um  $x_{t+1}$  zu prognostizieren, korrigiert man die Prognose  $\hat{x}_t$  um den Prognosefehler  $x_t - \hat{x}_t$ :

$$\hat{x}_{t+1} = \underbrace{\hat{x}_t}_{\text{Prognose in } t-1} + \underbrace{(x_t - \hat{x}_t)}_{\text{Prognosefehler}}$$

#### Beispiel 7

Ist  $\hat{x}_t = 100$  und  $x_t = 130$ , so gilt

$$x_t - \hat{x}_t = 130 - 100 = 30$$

Wir prognostizieren  $x_{t+1}$  also durch

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + (x_t - \hat{x}_t) = 100 + (130 - 100) = 130$$

Wir sehen, dass wir  $x_{t+1}$  durch  $x_t$  prognostizieren. Die Erfahrung lehrt, dass man bei der Korrektur nur einen Teil  $\lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t)$  des Prognosefehlers berücksichtigen sollte. Dies führt zu folgender Prognose:

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t) \tag{4.54}$$

Verwendet man den Ausdruck in Gleichung (4.54) zur Prognose, so spricht man von exponentieller Glättung 1. Ordnung. Man kann den Ausdruck in Gleichung (4.54) noch folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= \hat{x}_t + \lambda \cdot (x_t - \hat{x}_t) = \hat{x}_t + \lambda \cdot x_t - \lambda \cdot \hat{x}_t \\ &= \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot \hat{x}_t\end{aligned}\quad (4.55)$$

Wir prognostizieren  $x_{t+1}$  also durch eine konvexe Linearkombination aus  $x_t$  und  $\hat{x}_t$ . Dabei ist  $\lambda$  das Gewicht der aktuellen Beobachtung  $x_t$ .

Die EWMA-Karte basiert auf der exponentiellen Glättung erster Ordnung. Ausgehend von einem Startwert  $z_0$  wird in jedem Zeitpunkt  $t$  mit Hilfe der exponentiellen Glättung erster Ordnung ein Schätzwert von  $x_{t+1}$  bestimmt. Diesen bezeichnet man mit  $z_t$ . Wir ersetzen in Gleichung (4.55) also  $\hat{x}_{t+1}$  durch  $z_t$  und  $\hat{x}_t$  durch  $z_{t-1}$  und erhalten folgende Gleichung

$$z_t = \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot z_{t-1} \quad (4.56)$$

Dabei gilt  $0 \leq \lambda \leq 1$ . In der Regel setzt man  $z_0 = \mu_0$ .

Schauen wir uns an, wie sich  $z_t$  entwickelt.

Für  $t = 1$  gilt

$$z_1 = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot z_0 \quad (4.57)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Wir wählen  $\lambda = 0.2$ . Mit  $z_0 = 30$  gilt

$$z_1 = 0.2 \cdot 29 + 0.8 \cdot 30 = 29.8$$

Für  $t = 2$  gilt

$$\begin{aligned}z_2 &= \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot z_1 \stackrel{(4.57)}{=} \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot [\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot z_0] \\ &= \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^2 \cdot z_0\end{aligned}\quad (4.58)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Es gilt

$$z_2 = 0.2 \cdot 32 + 0.8 \cdot 29.8 = 30.24$$

Für  $t = 3$  gilt

$$\begin{aligned}z_3 &= \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot z_2 \\ &\stackrel{(4.58)}{=} \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot [\lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^2 \cdot z_0] \\ &= \lambda \cdot x_3 + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_2 + (1 - \lambda)^2 \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^3 \cdot z_0\end{aligned}\quad (4.59)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Es gilt

$$z_3 = 0.2 \cdot 26 + 0.8 \cdot 30.24 = 29.392$$

An Gleichung (4.59) auf Seite 59 kann man schon die allgemeine Struktur erkennen. Es gilt

$$\begin{aligned} z_t &= \lambda \cdot x_t + (1 - \lambda) \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + \dots + (1 - \lambda)^{t-1} \cdot \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda)^t \cdot z_0 \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda)^j x_{t-j} + (1 - \lambda)^t \cdot z_0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Wir erhalten folgende 30 Werte

29.800	30.240	29.392	28.914	28.531	28.625	29.500	30.000
29.600	30.480	30.584	30.667	30.534	30.627	31.102	30.681
30.745	30.396	29.917	29.933	30.947	31.357	31.286	31.429
31.343	31.474	31.380	31.704	32.363	32.690		

An Gleichung (4.60) können wir folgendes erkennen:

1. Wir erhalten  $z_t$  als Linearkombination des aktuellen Wertes  $x_t$  und aller vergangenen Werte  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ . Dabei wird die aktuelle Beobachtung mit  $\lambda$  gewichtet. Je größer  $\lambda$  ist, um so stärker wird also auch die aktuelle Beobachtung gewichtet. Die Gewichte der  $x_t$  bilden eine geometrische Folge. Je mehr Zeit seit der Erhebung einer Beobachtung vergangen ist, um so geringer ist ihr Gewicht. Deshalb heißt die Qualitätsregelkarte auch EWMA-Karte. Dies steht für exponentially weighted moving average und bedeutet exponentiell gewichteter Mittelwert.
2. das Gewicht von  $z_0$  beträgt  $(1 - \lambda)^t$ . Dieses wird mit wachsendem  $t$  immer kleiner. Für große Werte von  $t$  hängt  $z_t$  nur noch marginal von  $z_0$  ab.

Um die Qualitätsregelkarte aufstellen zu können, benötigen wir  $E(Z_t)$  und  $Var(Z_t)$ . Die Grenzen der Karte sind dann

$$\begin{aligned} LCL &= E(Z_t) - L \cdot \sqrt{Var(Z_t)} \\ UCL &= E(Z_t) + L \cdot \sqrt{Var(Z_t)} \end{aligned}$$

Ist der Prozess unter Kontrolle, so gilt  $E(X_t) = \mu_0$  für alle  $t$ . Hieraus folgt

$$E(Z_t) = \mu_0 \quad (4.61)$$

Der Beweis ist auf Seite 78 zu finden.

Nun benötigen wir noch  $Var(Z_t)$ . Wenn wir davon ausgehen, dass die  $X_t$  unabhängig mit identischer Varianz  $\sigma^2$  sind, dann gilt

$$Var(Z_t) = \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \quad (4.62)$$

Der Beweis ist auf Seite 79 zu finden.

Die Grenzen der EWMA-Karte sind also

$$LCL = \mu_0 - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (4.63)$$

$$CL = \mu_0 \quad (4.64)$$

$$UCL = \mu_0 + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2t}]} \quad (4.65)$$

Bei der EWMA-Karte müssen wir Werte für  $\lambda$  und  $L$  festlegen. Bevor wir näher auf die geeignete Wahl dieser Größen eingehen, schauen wir uns am Beispiel an, wie man die Grenzen der Karte bestimmt.

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Wir setzen  $L = 3$ . Mit  $\mu_0 = 30$ ,  $\sigma = 2$  und  $\lambda = 0.2$  gilt für  $t = 1$

$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^2]} = 28.8$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^2]} = 31.2$$

Für  $t = 2$  gilt

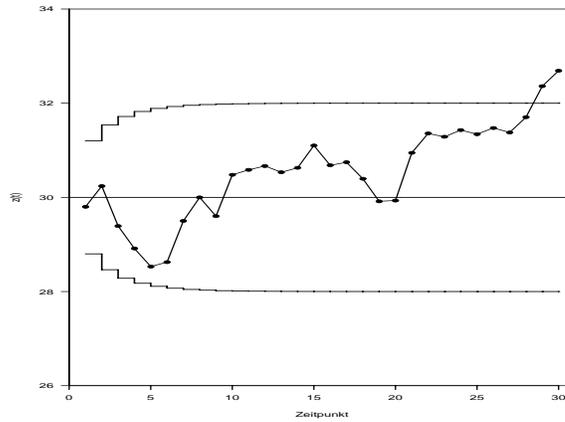
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^4]} = 28.46$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8} \cdot [1 - 0.8^4]} = 31.54$$

Abbildung 4.16 zeigt die EWMA-Karte. Im Gegensatz zur  $\bar{X}$ -Karte signalisiert sie, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 4.16: EWMA-Karte



Wir sehen, dass die Grenzen der EWMA-Karte mit wachsendem  $t$  immer stabiler werden. Dies ist kein Zufall. Aus  $0 \leq \lambda \leq 1$  folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \lambda)^{2 \cdot t} = 0 \quad (4.66)$$

Also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(Z_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot t}] = \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda}$$

Die approximativen Grenzen der EWMA-Karte sind also

$$LCL = \mu_0 - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (4.67)$$

$$CL = \mu_0 \quad (4.68)$$

$$UCL = \mu_0 + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (4.69)$$

### Beispiel 7 (fortgesetzt)

Es gilt

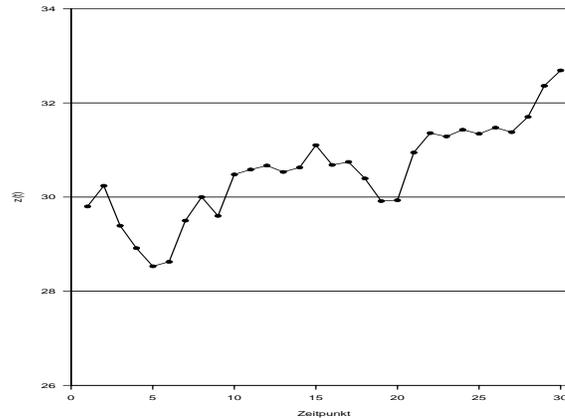
$$LCL = 30 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = 28$$

und

$$UCL = 30 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{0.2}{1.8}} = 32$$

Abbildung 4.17 zeigt die EWMA-Karte mit approximativen Grenzen. Im Gegensatz zur  $\bar{X}$ -Karte signalisiert sie, dass der Prozess nicht unter Kontrolle ist.

Abbildung 4.17: EWMA-Karte mit approximativen Grenzen



Die exakten Grenzen sind am Anfang enger als die approximativen. Montgomery empfiehlt, mit den exakten Grenzen zu arbeiten, wenn man eine Karte erstellt, da man dann eher bemerkt, wenn der Prozess zu Beginn nicht unter Kontrolle ist.

Wodurch unterscheiden sich die  $\bar{X}$ -Karte und die EWMA-Karte? Wir betrachten den Fall  $n = 1$ .

Bei der  $\bar{X}$ -Karte trägt man die Beobachtungen ab, bei der EWMA-Karte hingegen die mit der exponentiellen Glättung gewonnenen Prognosewerte  $z_t$ . Die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte sind

$$LCL = \mu - K \cdot \sigma$$

$$UCL = \mu + K \cdot \sigma$$

Die approximativen Grenzen der EWMA-Karte sind

$$LCL = \mu - L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

$$UCL = \mu + L \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

Ist  $K = L$  und  $\lambda = 1$ , so sind die  $\bar{X}$ -Karte und die EWMA-Karte identisch.

Ist  $K = L$  und  $\lambda < 1$ , so sind die Grenzen der EWMA-Karte enger als die Grenzen der  $\bar{X}$ -Karte.

Die EWMA-Karte entdeckt kleine Lageunterschiede schneller als die  $\bar{X}$ -Karte. Für  $\lambda = 1$  ist die EWMA-Karte mit der  $\bar{X}$ -Karte identisch. Also sollte  $\lambda$  klein sein. Außerdem sollte  $L$  so gewählt werden, dass die  $ARL_0$  der EWMA-Karte mit der  $ARL_0$  der  $\bar{X}$ -Karte übereinstimmt. Leider kann man die  $ARL$  der EWMA-Karte nicht so einfach bestimmen. Mit Hilfe numerischer Verfahren ist dies möglich. In Tabelle 4.4 ist für ausgewählte Lageunterschiede  $k \cdot \sigma$  die  $ARL$  zu finden.

Tabelle 4.4:  $ARL$  der  $\bar{X}$ -Karte und der EWMA-Karte

$k$	$\bar{X}$ -Karte	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.1$
		$L = 2.959$	$L = 2.859$	$L = 2.702$
0.00	370.4	370.5	370.0	370.9
0.25	281.2	173.9	121.0	89.4
0.50	155.2	58.5	36.2	28.2
0.75	81.2	24.4	16.4	14.7
1.00	43.9	12.7	9.8	9.7
1.50	15.0	5.5	5.2	5.8
2.00	6.3	3.3	3.6	4.2
3.00	2.0	1.9	2.3	2.8
4.00	1.2	1.4	1.8	2.1

Wir sehen, dass die EWMA-Karte einen kleinen Lageunterschied viel schneller bemerkt als die  $\bar{X}$ -Karte. So beträgt die  $ARL$  für einen  $1\sigma$ -Shift bei der EWMA-Karte mit  $\lambda = 0.2$  und  $L = 2.859$  gleich 9.8. Wir haben  $\lambda = 0.2$  und  $L = 3$  verwendet. Hier ist die  $ARL$  gleich 10.84. Die  $ARL_0$  ist hier aber gleich 559.9. Wir sehen, dass bei gleichem  $\lambda$  und nicht sehr viel größerem  $L$  der  $1\sigma$ -Shift genau so schnell entdeckt wird, die  $ARL_0$  aber wesentlich größer ist.

Wir müssen nun noch eine Frage beantworten. Wie geht man vor, wenn  $\mu_0$  und  $\sigma$  unbekannt sind? Die Frage kann leicht beantwortet werden. Man schätzt  $\mu_0$  und  $\sigma$  wie bei der  $\bar{X}$ -Karte für  $n = 1$ .

# Kapitel 5

## Prozessfähigkeitsanalyse

Bisher haben wir Verfahren betrachtet, mit denen man überprüfen kann, ob ein Prozess unter statistischer Kontrolle ist. Ist ein Prozess unter Kontrolle, so sagt dies aber nichts darüber aus, ob er auch das leistet, was man von ihm erwartet. In der Regel hat man nämlich eine Vorstellung davon, in welchem Bereich die Werte des interessierenden Merkmals liegen sollten.

### Beispiel 8

Ein Arbeitnehmer wünscht, dass die Fahrzeit zum Arbeitsplatz zwischen 25 und 35 Minuten liegt.

Man spricht von **Prozessfähigkeit**, **Spezifikation** oder **Kapazität** und gibt ein Intervall  $[LSL, USL]$  an, in dem die Werte des Prozesses liegen sollen. Alle Werte, die nicht im Intervall  $[LSL, USL]$  liegen, sind nicht akzeptabel. In der Produktion sind sie in der Regel Ausschuss.

Die untere Grenze dieses Intervalls heißt **untere Toleranzgrenze**  $LSL$  (lower specification limit) und die obere Grenze **obere Toleranzgrenze**  $USL$  (upper specification limit). Den Mittelpunkt des Intervalls  $[LSL, USL]$  nennt man den **Zielwert**  $T$  (target value).

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Es gilt  $LSL = 25$ ,  $USL = 35$  und  $T = 30$ .

Wir gehen im Folgenden von Normalverteilung aus.

Bei der Messung der Prozessfähigkeit müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Der Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses stimmt mit dem Zielwert  $T$  überein.
2. Der Erwartungswert  $\mu$  des Prozesses stimmt mit dem Zielwert  $T$  nicht überein.

## 5.1 $\mu$ und $T$ stimmen überein

Es gilt also  $T = \mu$ . Somit ist  $\mu$  der Mittelpunkt des Intervalls  $[LSL, USL]$ . Um eine Maßzahl für die Prozessfähigkeit zu erhalten, betrachten wir zwei Intervalle.

Das Intervall  $[LSL, USL]$  wird durch den Anwender vorgegeben. Es enthält die Werte, die für ihn akzeptabel sind. Seine Länge ist

$$l_1 = USL - LSL \quad (5.1)$$

Die Länge des gewünschten Streubereichs ist also gleich  $USL - LSL$ .

Nun benötigen wir noch ein Intervall, das nahezu alle Realisationen des Merkmales enthält. Ist das Merkmal normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ , so erwarten wir, dass 99.73 Prozent aller Beobachtungen im Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  liegen. Seine Länge beträgt

$$l_2 = 6\sigma. \quad (5.2)$$

Die Länge des tatsächlichen Streubereichs ist also gleich  $6 \cdot \sigma$ .

Ist  $LSL = \mu - 3 \cdot \sigma$  und  $USL = \mu + 3 \cdot \sigma$ , so sind 0.27 Prozent aller Beobachtungen nicht akzeptabel. Der Prozess erbringt eine gute bis sehr gute Leistung. Ist  $LSL < \mu - 3 \cdot \sigma$  und  $USL > \mu + 3 \cdot \sigma$ , so ist der Ausschuss noch kleiner. Die Ausführungen legen folgende Definition nahe

### Definition 1

Sei  $\mu$  der Erwartungswert,  $\sigma^2$  die Varianz eines Prozesses und  $T$  der Zielwert. Gilt  $T = \mu$ , dann heißt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma}. \quad (5.3)$$

*PCR*-Index.

### Beispiel 8 (fortgesetzt)

Der Arbeitnehmer kann sich für einen von zwei Prozessen entscheiden.

Zum einen kann er mit der Straßenbahn fahren. In diesem Fall ist die Fahrzeit normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 30$  und Varianz  $\sigma^2 = 1$ .

Er kann aber auch mit dem Auto fahren. In diesem Fall ist die Fahrzeit normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 30$  und Varianz  $\sigma^2 = 4$ .

Bei beiden Prozessen gilt  $\mu = T$ .

Beim ersten Prozess gilt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 1} = 1.67$$

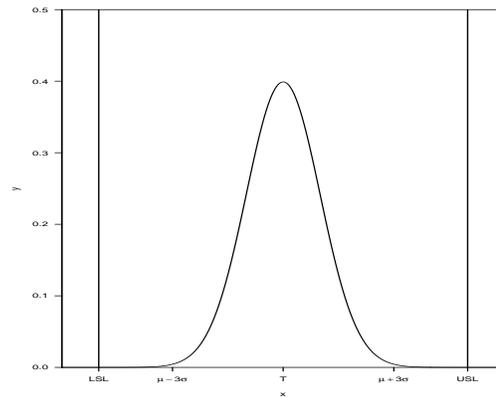
Beim zweiten Prozess gilt

$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 2} = 0.83$$

Wir erwarten von einem Prozess, dass der gewünschte Streubereich größer als der tatsächliche Streubereich ist. Also sollte der  $PCR$  größer als 1 sein. Montgomery fordert, dass der  $PCR$  eines existierenden Prozesses mindestens 1.33 und eines neuen Prozesses mindestens 1.50 betragen sollte.

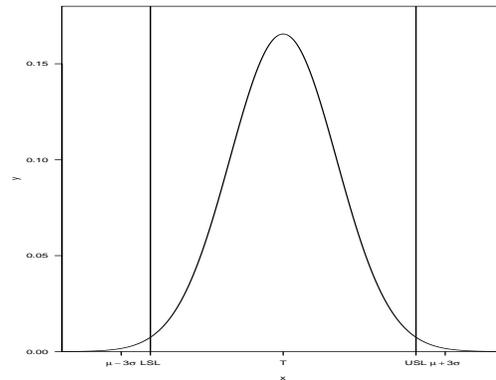
Abbildung 5.1 zeigt einen Prozess, bei dem der  $PCR$  gleich 1.67 ist. Dieser ist hervorragend, da die Spezifikationen von fast allen Beobachtungen eingehalten werden.

Abbildung 5.1: Prozess mit  $PCR = 1.67$



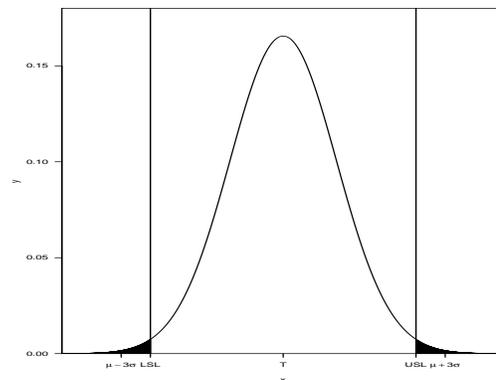
Ist der  $PCR$  kleiner als 1, so ist der Prozess sehr schlecht. Abbildung 5.2 zeigt einen Prozess, bei dem der  $PCR$  gleich 0.83 ist.

Abbildung 5.2: Prozess mit  $PCR = 0.83$



Um die Kapabilität zu beschreiben, kann man auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, einen Wert zu erhalten, bei dem die Spezifikation nicht eingehalten wird. In Abbildung 5.3 ist diese Wahrscheinlichkeit schwarz dargestellt.

Abbildung 5.3: Prozess mit  $PCR = 0.83$



Kann man Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  unterstellen, so gilt:

$$P(X < LSL) + P(X > USL) = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right).$$

Dabei ist  $\Phi(z)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle  $z$ .

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Beim ersten Prozess gilt

$$\begin{aligned}
 P(X < LSL) + P(X > ULS) &= \Phi\left(\frac{25 - 30}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35 - 30}{1}\right) \\
 &= \Phi(-5) + 1 - \Phi(5) \\
 &= 0.000000287 + 0.000000287 \\
 &= 0.000000574
 \end{aligned}$$

Beim zweiten Prozess gilt

$$\begin{aligned}
 P(X < LSL) + P(X > ULS) &= \Phi\left(\frac{25 - 30}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35 - 30}{2}\right) \\
 &= \Phi(-2.5) + 1 - \Phi(2.5) \\
 &= 0.00621 + 0.00621 \\
 &= 0.01242
 \end{aligned}$$

Wir können die Wahrscheinlichkeit, einen Wert zu erhalten, bei dem die Spezifikation nicht eingehalten wird, auch in Abhängigkeit vom  $PCR$  angeben. Es gilt

$$\boxed{P(X < LSL) + P(X > ULS) = 2 \Phi(-3 PCR)} \quad (5.4)$$

die Gültigkeit von Gleichung (5.4) sieht man folgendermaßen:

Aus  $USL - \mu = \mu - LSL$  folgt  $USL - \mu = -(LSL - \mu)$ . da bei Normalverteilung gilt

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(-\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (5.3) auf Seite 66 folgt

$$\sigma = \frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR} \quad (5.6)$$

Außerdem gilt

$$\mu = T = \frac{LSL + USL}{2} \quad (5.7)$$

Setzen wir die Gleichungen (5.6) und (5.7) in Gleichung (5.5) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P(X < LSL) + P(X > USL) &= 2\Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{LSL - \frac{LSL + USL}{2}}{\frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\frac{LSL - USL}{2}}{\frac{USL - LSL}{6 \cdot PCR}}\right) \\ &= 2\Phi(-3 PCR) \end{aligned}$$

Sind  $T$  und  $\mu$  identisch, so können wir zu jedem Wert des  $PCR$  die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein Objekt die Spezifikation nicht einhält. Multiplizieren wir diese Wahrscheinlichkeit mit einer Million, so erhalten wir die erwartete Anzahl unter einer Million (ppm=parts per million), die die Spezifikation nicht einhält. Tabelle 5.1 gibt für ausgewählte Werte des  $PCR$  diesen Wert an

Tabelle 5.1: *PCR* mit ppm, die die Spezifikation nicht einhalten

<i>PCR</i>	ppm
0.50	133614.400
0.67	45500.260
0.75	24448.950
0.83	12419.330
1.00	2699.796
1.25	176.835
1.33	63.343
1.50	6.795
1.67	0.573
2.00	0.002

Ist der Parameter  $\sigma$  unbekannt, so schätzen wir ihn durch  $\hat{\sigma}$  und ersetzen  $\sigma$  in Gleichung (5.3) auf Seite 66 durch  $\hat{\sigma}$ . Wir erhalten dann

$$\widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{6 \hat{\sigma}} \quad (5.8)$$

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Der Arbeitnehmer fährt an an 20 aufeinander folgenden Tagen mit dem Auto zur Arbeit und erhält folgende Werte

29 32 26 27 27 29 33 32 28 34 31 31 30 31 33 29 31 29 28 30

Wir schätzen  $\sigma$  mit Hilfe der Moving Ranges. Die Spannweiten von jeweils zwei benachbarten Beobachtungen sind:

3 6 1 0 2 4 1 4 6 3 0 1 1 2 4 2 2 1 2

Es gilt  $\bar{R} = 2.37$  und somit  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 2.37/1.128 = 2.1$ .

Somit gilt

$$\widehat{PCR} = \frac{USL - LSL}{6 \hat{\sigma}} = \frac{10}{6 \cdot 2.1} = 0.79$$

Ein Konfidenzintervall für den *PCR* zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist

$$\left[ \widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}}, \widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}{n-1}} \right]$$

Dabei ist  $\chi_{p;\nu}^2$  das  $p$ -Quantil der Chi-Quadratverteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden.  $n$  ist die Anzahl der Beobachtungen, die bei der Schätzung des Prozesses verwendet wurden.

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Sei  $1 - \alpha = 0.95$ . Es gilt  $n = 20$ . Tabelle A.2 auf Seite 81 entnehmen wir  $\chi_{0.025;19}^2 = 8.907$  und  $\chi_{0.975;19}^2 = 32.852$ . Also ist die Untergrenze des Konfidenzintervalls gleich

$$\widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}} = 0.79 \sqrt{\frac{8.907}{19}} = 0.54$$

und die Obergrenze gleich

$$\widehat{PCR} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}{n-1}} = 0.79 \sqrt{\frac{32.852}{19}} = 1.04$$

Wir können die Hypothesen

$$H_0 : PCR = PCR_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : PCR \neq PCR_0$$

zum Niveau  $\alpha$  testen. Liegt  $PCR_0$  nicht im Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ , so lehnen wir  $H_0$  ab.

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Wir testen

$$H_0 : PCR = 1.33 \quad \text{gegen} \quad H_1 : PCR \neq 1.33$$

zum Niveau  $\alpha = 0.05$ . da 1.33 nicht im Konfidenzintervall  $[0.54, 1.04]$  liegt, lehnen wir  $H_0$  ab.

## 5.2 $\mu$ und $T$ stimmen nicht überein

Wir haben bisher den Fall  $\mu = T$  betrachtet. Nun schauen wir uns an, was passiert, wenn  $\mu \neq T$  gilt.

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Der Erwartungswert der Fahrzeit bei der Fahrt mit der Straßenbahn beträgt nicht 30, sondern  $\mu = 34$ . Es gilt weiterhin  $\sigma = 1$ . Die Spezifikationen seien weiterhin  $LSL = 25$  und  $USL = 35$ .

Somit gilt

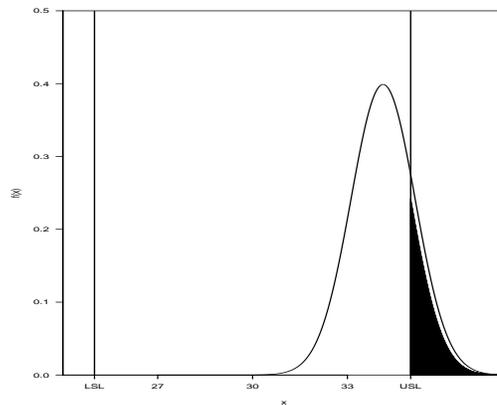
$$PCR = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{35 - 25}{6 \cdot 1} = 1.67 \tag{5.9}$$

Der Wert des  $PCR$  deutet auf eine hohe Prozessfähigkeit hin. Wir bestimmen noch die Wahrscheinlichkeit, dass die Spezifikation nicht eingehalten wird. Es gilt

$$\begin{aligned} P(X < LSL) + P(X > USL) &= \Phi\left(\frac{25 - 34}{1}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{35 - 34}{1}\right) \\ &= \Phi(-9) + 1 - \Phi(1) = 0.1587 \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr hoch. Abbildung 5.4 veranschaulicht den Sachverhalt.

Abbildung 5.4: Ein Beispiel, bei dem der  $PCR$  eine schlechte Maßzahl ist



Wie das Beispiel zeigt, liefert der  $PCR$  ein falsches Bild der Prozessfähigkeit, wenn der Zielwert  $T$  nicht mit dem Erwartungswert des Prozesses zusammenfällt. In diesem Fall sollte man die Abstände zwischen  $\mu$  und dem  $LSL$  und  $\mu$  und dem  $USL$  betrachten. Je größer diese sind, um so besser ist die Prozessfähigkeit. Wir betrachten die zwei Maßzahlen  $PCR_L$  und  $PCR_U$ , die folgendermaßen definiert sind

$$PCR_L = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (5.10)$$

und

$$PCR_U = \frac{USL - \mu}{3\sigma}. \quad (5.11)$$

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$PCR_L = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{34 - 25}{3 \cdot 1} = 3$$

und

$$PCR_U = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{35 - 34}{3 \cdot 1} = 0.33.$$

Eine auf  $PCR_L$  und  $PCR_U$  beruhende Maßzahl für die Prozessfähigkeit ist

$$PCR_k = \min\{PCR_L, PCR_U\}. \quad (5.12)$$

**Beispiel 8 (fortgesetzt)**

Es gilt

$$PCR_k = \min\{PCR_L, PCR_U\} = \min\{3, 0.33\} = 0.33.$$

Die Prozessfähigkeit ist also sehr schlecht.

Sind die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  des Prozesses unbekannt, so schätzen wir sie durch  $\bar{x}$  und  $\hat{\sigma}$ . Wir erhalten folgende Maßzahlen:

$$\widehat{PCR}_L = \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} \quad (5.13)$$

$$\widehat{PCR}_U = \frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}} \quad (5.14)$$

$$\widehat{PCR}_k = \min\{\widehat{PCR}_L, \widehat{PCR}_U\}. \quad (5.15)$$

**Beispiel 9**

Ein Student will, dass die Fahrzeit zur Uni zwischen 26 und 34 Minuten liegt. Um zu überprüfen, ob ein Prozess dieses leistet, registriert er die Zeit von 20 aufeinanderfolgenden Tagen. Er erhält folgende Werte

33 31 31 32 32 33 30 33 32 34 33 32 32 32 32 31 32 32 31 32

Es gilt  $\bar{x} = 32$ . Die Spannweiten von jeweils zwei benachbarten Werten sind:

2 0 1 0 1 3 3 1 2 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1

Es gilt  $\bar{R} = 1$  und somit  $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2 = 1/1.128 = 0.89$ . Also gilt

$$\widehat{PCR}_L = \frac{\bar{x} - LSL}{3\hat{\sigma}} = \frac{32 - 26}{3 \cdot 0.89} = 2.25,$$

$$\widehat{PCR}_U = \frac{USL - \bar{x}}{3\hat{\sigma}} = \frac{34 - 32}{3 \cdot 0.89} = 0.75.$$

und

$$\widehat{PCR}_k = \min\{2.25, 0.75\} = 0.75.$$

Die Prozessfähigkeit ist schlecht.

Die Untergrenze eines Konfidenzintervall für den  $PCR_k$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist

$$\widehat{PCR}_k \left( 1 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\widehat{PCR}_k^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right)$$

und die Obergrenze

$$\widehat{PCR}_k \left( 1 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\widehat{PCR}_k^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right)$$

Dabei ist  $z_{1-\alpha/2}$  das  $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standardnormalverteilung.  $n$  ist die Anzahl der Beobachtungen, die bei der Schätzung des Prozesses verwendet wurden.

### Beispiel 9 (fortgesetzt)

Sei  $1 - \alpha = 0.95$ . Es gilt  $n = 20$ . Hieraus folgt  $z_{0.975} = 1.96$ . Also ist die Untergrenze des Konfidenzintervalls gleich

$$0.75 \left( 1 - 1.96 \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 0.75^2} + \frac{1}{2(20-1)}} \right) = 0.47$$

und die Obergrenze

$$0.75 \left( 1 + 1.96 \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 0.75^2} + \frac{1}{2(20-1)}} \right) = 1.03$$

# Anhang A

## A.1 Beweise

Sind  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  Zufallsvariablen und  $a$  und  $b$  reelle Zahlen, dann gilt

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Cov}(a + X, b + Y) = \text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) \quad (\text{A.5})$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad (\text{A.6})$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &\stackrel{(\text{A.1})}{=} \text{Cov}(aX + b, aX + b) \\ &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \text{Cov}(aX, aX) \\ &\stackrel{(\text{A.4})}{=} a^2 \text{Cov}(X, X) \\ &\stackrel{(\text{A.1})}{=} a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \quad (\text{A.7})$$

Dies sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - Y) &\stackrel{\text{(A.1)}}{=} \text{Cov}(X - Y, X - Y) \\ &\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X, X - Y) + \text{Cov}(-Y, X - Y) \\ &\stackrel{\text{(A.2)}}{=} \text{Cov}(X - Y, X) + \text{Cov}(X - Y, -Y) \\ &\stackrel{\text{(A.5)}}{=} \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(-Y, X) + \text{Cov}(X, -Y) + \text{Cov}(-Y, -Y) \\ &\stackrel{\text{(A.4)}}{=} \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Y) \\ &\stackrel{\text{(A.1)}}{=} \text{Var}(X) - \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \\ &\stackrel{\text{(A.2)}}{=} \text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

### A.1.1 Der Beweis von Gleichung (4.61) auf Seite 60

Die Gültigkeit von Gleichung (4.61) auf Seite 60 sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \right] \\ &= E \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} \right] + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \\ &= \lambda \cdot E \left[ \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} \right] + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j E(X_{t-j}) + (1-\lambda)^t \cdot \mu_0 \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j \mu_0 + (1-\lambda)^t \cdot \mu_0 \\ &= \mu_0 \left[ \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j + (1-\lambda)^t \right] \\ &\stackrel{(A.11)}{=} \mu_0 \left[ \lambda \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^t}{1 - (1-\lambda)} + (1-\lambda)^t \right] \\ &= \mu_0 \left[ \lambda \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^t}{\lambda} + (1-\lambda)^t \right] \\ &= \mu_0 [1 - (1-\lambda)^t + (1-\lambda)^t] \\ &= \mu_0 \end{aligned}$$

### A.1.2 Der Beweis von Gleichung (4.62) auf Seite 61

Die Gültigkeit von Gleichung (4.62) auf Seite 61 sieht man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z_t) &= \text{Var} \left( \lambda \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} + (1-\lambda)^t \cdot z_0 \right) \\
 &\stackrel{\text{Var}(a+b \cdot Y) = a^2 \cdot \text{Var}(Y)}{=} \lambda^2 \cdot \text{Var} \left( \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j X_{t-j} \right) \\
 &\stackrel{\text{Unabhängigkeit}}{=} \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \text{Var} \left( (1-\lambda)^j X_{t-j} \right) \\
 &= \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^{2j} \cdot \sigma^2 \\
 &= \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{j=0}^{t-1} [(1-\lambda)^2]^j \\
 &\stackrel{\text{(A.11)}}{=} \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}}{1 - (1-\lambda)^2} \\
 &= \sigma^2 \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}}{1 - 1 + 2 \cdot \lambda - \lambda^2} \\
 &= \sigma^2 \cdot \frac{\lambda}{2 - \lambda} \cdot [1 - (1-\lambda)^{2 \cdot t}]
 \end{aligned}$$

### A.1.3 Die geometrische Folge

Die Folge  $a_1, a_2, \dots$  heißt geometrische Folge, wenn gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{A.8})$$

Ist  $a_1 = a$ , so erhalten wir die Folge  $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$ . Gilt  $|q| < 1$ , so konvergiert die geometrische Folge gegen 0.

Wir betrachten nun die ersten  $n$  Summanden der geometrischen Folge in Gleichung

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \quad (\text{A.9})$$

Multiplizieren wir Gleichung (A.9) mit  $q$ , so erhalten wir

$$q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \quad (\text{A.10})$$

Subtrahieren wir Gleichung (A.10) von Gleichung (A.9), so erhalten wir

$$S_n - q \cdot S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - (q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n) = 1 - q^n$$

Also gilt

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Tabellen

Tabelle A.1: Werte von  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $A_2$ ,  $D_3$  und  $D_4$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_2$	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078
$d_3$	0.853	0.888	0.880	0.864	0.848	0.833	0.820	0.808	0.797
$A_2$	1.880	1.023	0.729	0.577	0.483	0.419	0.373	0.337	0.308
$D_3$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.076	0.136	0.184	0.223
$D_4$	3.267	2.574	2.282	2.115	2.004	1.924	1.864	1.816	1.777

Tabelle A.2: Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung

$\nu$	$chi^2_{\nu;0.025}$	$chi^2_{\nu;0.975}$
1	0.001	5.024
2	0.051	7.378
3	0.216	9.348
4	0.484	11.143
5	0.831	12.833
6	1.237	14.449
7	1.690	16.013
8	2.180	17.535
9	2.700	19.023
10	3.247	20.483
11	3.816	21.920
12	4.404	23.337
13	5.009	24.736
14	5.629	26.119
15	6.262	27.488
16	6.908	28.845
17	7.564	30.191
18	8.231	31.526
19	8.907	32.852
20	9.591	34.170

Tabelle A.3: Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  der Standardnormalverteilung

$z$	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882

Tabelle A.4: Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$  der Standardnormalverteilung

$z$	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

# Literaturverzeichnis

- Bissell, D. (1994). *Statistical Methods for SPC and TQM*. Chapman & Hall, London, 1 edition.
- Deming, W. (1986). *Out of the Crisis*. MIT Center for Advanced Engineering Study, Cambridge, 1 edition.
- Krehbiel, T. (1994). Tampering with a stable process. *Teaching Statistics*, 16:75–79.
- Sparks, R. and Field, J. (2000). Using deming's funnel experiment to demonstrate effects of violating assumptions underlying shewhart's control charts. *The American Statistician*, 54:291–302.